The Title for ETP (Electronic Technical Publishing) Typesetting Style

The Author

The Date

CT

Contents

A

0.1 Siruri de numere reale

Convergenta este conceptul fundamental al analizei matematice. Cu ajutorul acestui concept putem sa investigam ce se intampla atunci cand doua cantitati se apropie una de alta, sau cand o cantitate creste depasind orice margine.

In acest capitol detaliem aceste idei pentru siruri de numere reale. Vom relua pe scurt teoremele facute in liceu, subliniind cateva tehnici de demonstratie standard. Vom prezenta de asemenea si cateva noi rezultate care ne vor fi de folos in capitolele urmatoare.

B

0.1.1 1.1. Definitia unui sir

*Fie X este o multime nevida, n_0 un numar natural si $\mathbb{N}_0 := \{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0\}$. O functie $f : \mathbb{N}_0 \to X$ se numeste **sir** (de elemente din X). De regula identificam sirul f cu imaginea sa astfel: notam $f(n) := a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si notam $(a_n)_{n \geq n_0} := f$, sau $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} := f$, $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \cdots := f$, sau, daca nu exista pericol de confuzie, $(a_n) := f$. In acest caz spunem ca $(a_n)_{n \geq n_0}$ este un sir (de elemente din X), iar a_n este **termenul general** al sirului $(a_n)_{n \geq n_0}$.*

In acest capitol presupunem ca $X \subset \mathbb{R}$. Vorbim astfel de siruri de numere reale.

Exemplul 1.1.1. Sirul de numere naturale $(n^3)_{n \geq 1}$ poate fi descris prin

$1, 8, 27, 64, \cdots$. Numarul n^3 este termenul general al sirului considerat.

Exemplul 1.1.2. Sirul de numere rationale $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\geq 1}$ poate fi descris prin $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$.

Exemplul 1.1.3. Sirul $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$ poate fi descris prin cu ajutorul termenului general: $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 0}$.

Peste tot in cele ce urmeaza, in lipsa altor precizari, literele n, k, i si j vor desemna numere naturale.

B

0.1.2 1.2. Siruri convergente

In exemplul 1.1.2. termenul general a_n devine din ce in ce mai mic (in valoare absoluta) atunci cand indicele n creste; putem spune a_n "tinde" la zero. Facand cateva calcule in exemplul 1.1.3., observam ca termenul general $\frac{n}{n+1}$ "tinde" la 1 atunci cand n creste. Surprindem aceste fenomene in definitia urmatoare.

Definitia 1.2.1. *Fie $(a_n)_{n\geq n_0}$ un sir de numere reale. Daca exista un numar real a astfel ca pentru orice $\epsilon > 0$ sa existe un rang $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ (care depinde de a si ϵ) astfel incat $|a_n - a| < \epsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\epsilon$ spunem ca sirul (a_n) este* ***convergent****, iar a este* ***limita*** *sa; in acest caz scriem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,, sau $a_n \to a$ si spunem ca a_n* ***tinde*** *la a cand n tinde la infinit.*

Pe scurt, folosind cuantificatorul universal ($\forall$ -oricare, orice) si cuantificatorul existential ($\exists$ -exista), sirul de numere reale (a_n) este convergent daca si numai daca

[$\exists a \in \mathbb{R}$ astfel incat $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $|a_n - a| < \epsilon$ $\forall n \geq n_\epsilon$.

Daca sirul (a_n) nu este convergent spunem ca el este un **sir divergent**. A studia **natura unui sir** inseamna a stabili daca sirul este convergent sau divergent.

Exemplul 1.2.1. Sa aratam ca sirul de la Exemplul 1.1.2. este convergent si are limita nula, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$. Fie $\epsilon > 0$. Conform definitiei de mai sus, trebuie sa cautam un rang $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$ pentru orice $n \geq n_\epsilon$; dar $\frac{1}{n} < \epsilon$ daca si numai daca $n > \frac{1}{\epsilon}$. Luand $n_\epsilon := \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$ (unde cu $\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$ am notat partea intreaga a numarului pozitiv $\frac{1}{\epsilon}$) constatam ca $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0\right| < \epsilon$ $\forall n \geq n_\epsilon$, adica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0 \in \mathbb{R}$, deci sirul este convergent.

Exemplul 1.2.2. Sa aratam ca sirul de la Exemplul 1.1.1. este divergent prin reducere la absurd. Presupunem ca sirul este convergent, deci $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 := a \in \mathbb{R}$. Fie $\epsilon = 1$. Atunci exista $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$\left|n^3 - a\right| < 1 \text{ cand } n \geq n_\epsilon.$$

Cum exista o infinitate de numere naturale $n > \max\left\{n_\epsilon, \sqrt[3]{\epsilon + a}\right\}$ rezulta ca afirmatia precedenta este falsa. In consecinta sirul $\left(n^3\right)_{n\geq 1}$ este divergent.

Exemplul 1.2.3. Am vazut ca, in cazul Exemplului 1.1.3., a_n se apropie de 1 cand n creste. Sa aratam ca, intradevar $a_n \to 1$. Din nou, fie $\epsilon > 0$. Trebuie sa

depistam un rang incepand de la care $|a_n - 1| < \epsilon$. Deoarece

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1},$$

atunci avem echivalentele:

$$|a_n - 1| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Prin urmare, luand drept rang $n_\epsilon := \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$, avem: $|a_n - 1| < \epsilon\ \forall n \geq n_\epsilon$, deci $\frac{n}{n+1} \to 1$,iar sirul $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ este convergent.

Observatia 1.2.1. *Numarul n_0 din definitia sirului nu afecteaza natura sirului.* De altfel, din definitia precedenta rezulta ca daca schimbam un numar finit de termeni ai unui sir, natura sa nu este afectata.

O prima proprietate importanta -si care justifica corectitudinea sintagmei "limita sirului (a_n) este a"- este urmatoarea propozitie.

Propozitia 1.2.1. *Daca sirul (a_n) este convergent atunci limita sa este unica.*

Demonstratie. Sa presupunem ca (a_n) are limitele $a, a' \in \mathbb{R}$. Trebuie sa aratam ca $a = a'$. Fie $\epsilon > 0$ arbitrar. Din ipoteza rezulta ca exista un rang n_ϵ astfel ca

$$|a_n - a| < \epsilon, |a_n - a'| < \epsilon\ \forall n \geq n_\epsilon.$$

Atunci

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < 2\epsilon$$

pentru orice $n \leq n_\epsilon$. Pin urmare

$$0 \leq |a - a'| \leq 2\epsilon \text{ pentru orice } \epsilon > 0.$$

De aici rezulta imediat ca $a = a'$.■

Definitia 1.2.2. Daca (a_n) *si* (b_n) *sunt doua siruri atunci sirul* $(a_n + b_n)$ *se numeste* ***suma sirurilor*** (a_n) *si* (b_n), sirul $(a_n b_n)$ *se numeste* ***produsul sirurilor*** (a_n) *si* (b_n), *iar daca* $a_n \neq 0$ *pentru orice* n *sirul* $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ *se numeste* ***catul sirurilor*** (a_n) *si* (b_n).

Cu ajutorul definitiei se arata ca

Propozitia 1.2.2. (Operatii cu siruri) *Daca sirurile* (a_n) *si* (b_n) *sunt convergente atunci*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$
3. *Daca* $a_n \neq 0$ *pentru orice* n *si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

Demonstratie.

....■

Incheiem acest paragraf cu cateva consideratii asupra relatiei dintre limitele sirurilor de numere reale si inegalitati.

Propozitia 1.2.3. *Daca sirurile* $(a_n)_{n\geq 1}$ *si* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt convergente si* $a_n \leq b_n\ \forall n \geq 1$ *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Demonstratie.

....

Urmatoarea teorema rafineaza precedenta propozitie: daca un sir $(b_n)_{n\geq 1}$ (despre care nu presupunem ca este convergent) are termenul general "intre" termenii generali ai altor doua siruri convergente la aceeasi limita atunci si $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent la aceasta limita.

Teorema 1.2.2. **Teorema clestelui.** Daca

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

pentru orice n si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Demonstratie.

....

B

0.1.3 3. Siruri Cauchy

Un sir de numere reale care are propritatea ca pentru un ϵ arbitrar elementele sale se grupeaza de la un rang incolo (de exemplu pentru indici suficient de mari toti termenii sirului sunt intr-un interval de lungime 2ϵ) pare a fi convergent. Proprietatea aceasta este adevarata in $\mathbb{R}$, dar nu are loc in orice submultime a multimii numerelor reale. De pilda trunchierile rationale ale numarului irational $\sqrt{2}$ dau un *sir de numere rationale*:

$$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots$$

care este nu este convergent in $\mathbb{Q}$, dar, desigur este convergent in $\mathbb{R}$.

Aceasta sectiune o dedicam caracterizarii sirurilor reale de elemente care au proprietatea descrisa mai sus numite siruri Cauchy.

Definitia 1.3.1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un sir de numere reale. Daca

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ cu proprietatea } |a_n - a_{n+p}| < \epsilon \ \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N}$$

atunci sirul (a_n) se numeste **sir Cauchy** sau **sir fundamental**.

Convergenta unui sir si calitatea sa de a fi sir fundamental sunt proprietati echivalente.

Teorema 1.3.1. *In multimea numerelor reale un sir este este Cauchy daca si numai daca el este convergent.*

Demonstratie.

....

Exemplul 1.3.1. *Sirul* $((-1)^n)$ *este divergent.*

Vom arata acest lucru dovedind ca sirul nu este fundamental. Conform definitiei, trebuie sa gasim un $\epsilon > 0$ astfel ca pentru orice n_ϵ natural sa existe $n \geq n_\epsilon$ si $p \in \mathbb{N}$ astfel ca $|a_n - a_{n+p}| \geq \epsilon$.

Fie $\epsilon := 1$. Atunci pentru orice $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ avem $\left|(-1)^{n_\epsilon} - (-1)^{n_\epsilon+1}\right| = 2 > 1$. Prin urmare $((-1)^n)$ nu este fundamental si, conform teoremei1.3.1, sirul nu este convergent.

Observatia 1.3.1. In exemplul precedent am negat afirmatia din definitia precedenta. Ca o regula generala, atunci cand vrem sa negam o afirmatie, negarea se

face inlocuind cuantificatorul $\forall$ cu cuantificatorul $\exists$ si invers, adica inlocuind cuantificatorul $\exists$ cu cuantificatorul $\forall$.

B

0.1.4 4 Siruri marginite

Daca termenii unui sir pot sa fie arbitrar de mari (in valoare absoluta) avem de-a face cu un sir nemarginit. Am vazut ca sirurile fundamentale sunt convergente. Spre deosebire de acestea, sirurile marginite nu sunt intodeauna convergente. Cu toate acestea, cu conditii suplimentare, ele pot fi convergente. De asemenea, un sir marginit contine intodeauna un subsir convergent.

Definitia 1.4.1. *Sirul* $(a_n)_{n \geq n_0}$ *este* ***crescator*** *daca*

$$a_n \leq a_{n+1} \; \forall n \geq n_0.$$

Sirul este ***strict crescator*** *daca*

$$a_n < a_{n+1} \; \forall n \geq n_0.$$

Definitia 1.4.2. *Sirul* $(a_n)_{n \geq n_0}$ *este* ***descrescator*** *daca*

$$a_n \geq a_{n+1} \; \forall n \geq n_0.$$

Sirul $(a_n)_{n \geq n_0}$ *este* ***strict descrescator*** *daca*

$$a_n > a_{n+1} \; \forall n \geq n_0.$$

Definitia 1.4.3. *Sirul* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *este* ***monoton*** *daca el este crescator, strict crescator, descrescator sau strict descrescator.*

Definitia 1.4.4. *Sirul* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *este* ***marginit*** *daca*

$$\exists M \geq 0 \text{ astfel ca } |a_n| \leq M \ \forall n \geq n_0.$$

Daca sirul nu este marginit spunem ca el este ***nemarginit****.*

Exemplul 1.4.1. *Sirul* $((-1)^n)$ *este marginit* ($M = 1$)*, nu este monoton si este divergent.*

Exemplul 1.4.2. *Sirul* $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ *este marginit,.nu este monoton si este convergent.*

Exemplul 1.4.3. *Sirul* $\left(\frac{1}{n}\right)$ *este marginit,. este monoton (descrescator) si este convergent.*

Propozitia 1.4.1. *Un sir convergent de numere reale este marginit.*

Demonstratie.

....

Sirul $(\sqrt{n})$ este crescator dar este nemarginit. Totusi, daca la monotonie mai adaugam marginirea obtinem convergenta.

Teorema 1.4.1. *Un sir monoton si marginit este convergent.*

Demonstratie.

....

Exemplul 1.2.4. *Sirul cu termenul general* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *este monoton si marginit (aratati aceste proprietati). Prin urmare el este convergent. Limita sa este numarul transcendent* e.

Definitia 1.4.5. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un sir de numere reale si* $(k_n)_{n\geq 1}$ *un sir strict crescator de numere naturale. Atunci* $(a_{k_n})_{n\geq 1}$ *se numeste subsir al sirului* $(a_n)_{n\geq 1}$.

Exemplul 1.4.4. Fie sirul $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\geq 1}$. Atunci sirul $\left(\frac{-1}{2n}\right)_{n\geq 1} = \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, ...$ este un subsir al sirului dat $(k_n = 2n)$. De asemenea $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\geq 1}$ este un subsir al sirului $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Propozitia 1.4.2. *Daca un sir este convergent atunci toate subsirurile sale sunt convergente..*

Demonstratie.

....

Observatia 1.4.1. *Inversa afirmatiei din propozitia de mai sus este adevarata.* Aratati acest lucru.

Marginirea unui sir atrage "gruparea" termenilor sirului, iar acest fapt implica existenta unui subsir convergenet. Aceasta este o propietate importanta a sirurilor marginite.

Teorema 1.4.2. **(teorema Bolzano-Weierstrass)** *Un sir marginit are un subsir convergent.*

Demonstratie.

....

Exemplul 1.4.5. *Am vazut ca sirul* $((-1)^n)$ *este marginit, deci divergent. Susirurile sale* (-1) si (1) sunt convergente.

Teorema Bolzano-Weierstrass este un instrument util in analiza functiilor cu o singura variabila si va fi folosita in capitolele urmatoare (vezi...).

B

0.1.5 5. Limite infinite

Nemarginirea unui sir atrage divergenta sa. Totusi, in unele cazuri, sirurile nemarginite au o comportare regulara, comportare pe care o vom studia in cele ce urmeaza.

Definitia 1.5.1. *Fie* $(a_n)_{n \geq n_0}$ *un sir de numere reale.*

1. *Spunem ca sirul are* ***limita infinit*** *daca si numai daca*

   $$\forall M > 0 \exists N_M \in \mathbb{N}\text{astfel incat } a_n \geq M \forall n \geq N_M$$

   In acest caz scriem $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ sau $a_n \to \infty$.

2. *Spunem ca sirul are* ***limita minus infinit*** *daca si numai daca*

   $$\forall M < 0 \exists N_M \in \mathbb{N}\text{astfel incat } a_n \leq M \forall n \geq N_M$$

   In acest caz scriem $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$ sau $a_n \to -\infty$.

Uneori, daca $a_n \to \infty$, spunem ca sirul (a_n) **depaseste orice margine**.

Exemplul 1.5.1. *Fie $a > 1$. Atunci $a^n \to \infty$.*

Desigur $a^{n+1} > a^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Presupunem, prin absurd, ca $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \infty$. Atunci , conform definitiei 1.5.1., exista $M > 0$ astfel incat pentru orice $N \in \mathbb{N}$ exista $m > N$ pentru care $a^m \leq M$. Fie $n \in \mathbb{N}$. Din cele de afirmate rezulta ca exista $m \geq n$ astfel ca $a^n \leq a^m \leq M$. Prin urmare sirul (a^n) este marginit. Fie $\overline{M} := \sup\{a^n \,|n \in \mathbb{N}\}$. Cum $\frac{\overline{M}}{a} < \overline{M}$, exista $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $a^n > \frac{\overline{M}}{a}$. Dar $a^{n+1} = aa^n > a\frac{\overline{M}}{a} = \overline{M}$. Contradictie. In consecinta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.■

Majoritatea operatiilor cu siruri cu limite infinite respecta regulile similare sirurilor convergente. Exceptiile le abordam la secctiunea "Exercitii".

Propozitia 1.2.2. (Operatii cu siruri cu limita infinita) Fie (a_n) *un sir pentru care* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

1. *Daca (b_n) este un sir marginit atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$, iar daca $a_n \neq 0$ pentru orice n atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 0$.*

2. *Daca $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$ si $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.*

3. *Daca $a > 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} aa_n = \infty$.*

4. *Daca $a < 0$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} aa_n = -\infty$.*

Demonstratie.

....■

Exemplul 1.5.2. *Fie $a > 0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 0$.*

Observatia 1.5.1. *Adunarea a doua siruri, unul cu limita infinit, celalalt cu limita minus infinit nu apare in propozitiile precedente. De asemenea produsul dintre doua siruri, unul cu limita infinita, celalalt cu limita nula si nici catul a doua siruri cu limita nula (ori cu limite infinite) nu apar in propozitiile precedente. Numim aceste tipuri de limite* ***cazuri de nedeterminare****.*

Observatia 1.5.2. *Despre un sir (a_n) de numere reale am dovedit urmatoarele implicatii si echivalente legate de proprietatea de marginire:*

$$\begin{array}{rcl}
\text{marginit} & \Rightarrow & \text{subsir convergent} \\
\Uparrow & \nwarrow & \Uparrow \\
\text{monoton\&marginit} & \Rightarrow & \text{convergent} \Leftrightarrow \quad \text{Cauchy} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{monoton} & \Rightarrow & \text{limita finita sau infinita}
\end{array}$$

B

0.1.6 6. Teorema lui Heine

B

0.1.7 7. Probleme rezolvate

//

B

0.1.8 8. Exercitii

1. Argumentati afirmatia din observatia 1.2.1.

2. Argumentati existenta rangului n_ϵ din demonstratia propozitiei 1.2.1.

3. Fie sirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ si $(b_n)_{n\geq 1}$ astfel incat $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ pentru orice $n \geq 1$. Aratati ca daca $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent atunci si $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

4. Fie sirul $(a_n)_{n\geq 1}$. Aratati ca $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ daca si numai daca $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - l| = 0$.

5. Demonstrati egalitatile:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1} = 2$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2+1} = 0$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = 0$

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) = \frac{1}{3}$.

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin(n!) = 0$

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n)!} (1! + 2! + \cdots n!) = 0$

6. Aratati ca un sir convergent este marginit.

7. Este adevarata propozitia "daca (a_n) este un sir marginit atunci el este convergent"? Justificati raspunsul dat.

8. Stabiliti limita -daca exista- pentru fiecare dintre sirurile de mai jos.

   (a) $1, 2, 3, \cdots$

   (b) $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$

   (c) (1^n)

   (d) $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$

   (e) $\frac{n}{\ln n^{10}}$

   (f) $\left(n \sin \frac{\pi}{n}\right)$

   (g) $\left(\frac{tg\frac{\pi}{n}}{arctg\frac{\pi}{n}}\right)$

   (h) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$

   (i) $\left(\frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right)$

   (j) $\left(\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right)$

   (k) $\left(\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right)$

   (l) $\left(\frac{n \sin n!}{(n+1)^2}\right)$

9. Sirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ si $(b_n)_{n\geq 1}$ au proprietatile:

   (i) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

(ii) $a_n - b_n \to 0$

Aratati ca sirurile sunt convergente si ca au aceasi limita.

10. Demonstrati ca daca $(a_n)_{n\geq 1}$ converge, atunci$\left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$.

11. Demonstrati ca daca $(a_n)_{n\geq 1}$ converge si $a_n \geq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|}$.

12. Dovediti ca, daca $a > 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

13. Calculati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

14. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un sir de numere reale si $(p_n)_{n\geq 1}$ un sir de numere pozitive astfel incat $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} = 0$.

    (a) Demonstrati ca daca $(a_n)_{n\geq 1}$ converge la a, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} = a$.

    (b) Dati un exemplu care sa dovedeasca faptul ca din convergenta sirului $\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\right)$ nu rezulta convergenta sirului (a_n).

15. Aratati ca exista doua siruri (a_n) si (b_n) astfel incat $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$ iar sirul $(a_n + b_n)$ diverge.

16. Aratati ca exista doua siruri (a_n) si (b_n) astfel incat $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$ iar sirul $(a_n + b_n)$ converge.

17. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Aratati ca exista doua siruri (a_n) si (b_n) astfel incat $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$ si $a_n + b_n \to \alpha$.

18. Aratati ca

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, a \in \mathbb{R}$

    (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$

    (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!} = 0$

    (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[an]}{n} = 0, a \in \mathbb{R}$

19. Sa se arate ca daca $a_n \to a \in \mathbb{R}^*$ atunci exista $\alpha > 0$ astfel incat $|a_n| \geq \alpha$ pentru orice numar natural n.

20. Fie (a_n) un sir nemarginit. Aratati ca exista un subsir (b_n) al sirului dat astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = \infty$.

21. Fie (a_n) un sir marginit si divergent. Aratati ca exista doua subsiruri ale sirului dat care sunt convergente dar au limite diferite.

22. Demonstrati **Teorema Stolz_Cesàro**:

    Daca (a_n) este un sir de numere reale si (b_n) este un sir crescator si nemarginit astfel ca sa existe $L := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ atunci exista $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

Indicatie. In exercitiul 14 luati $p_n := b_{n+1} - b_n$ si un alt sir adecvat.

23. Demonstrati **Teorema lui Cauchy**:

Daca (a_n) *este un sir de numere pozitive si exista* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} := L$ *atunci exista si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$

24. Aratati ca

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = 1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{(2k)^2} = \infty$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)} 2^{-k} = 1$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^a \prod\limits_{k=3}^{n} \frac{k^2-1}{k^2+k-6} = 20$,daca $a = 1$ si $\lim\limits_{n\to\infty} n^a \prod\limits_{k=3}^{n} \frac{k^2-1}{k^2+k-6} = 0$,daca $a < 1$.

25. Demonstrati ca $\left(\frac{\left[10^n\sqrt{2}\right]}{10^n}\right)$ este un sir Cauchy de numere rationale a carui limita nu este un numar rational.

26. Comentati afirmatia: *daca* (a_n) *este un sir convergent de numere reale iar* $f :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *este o functie injectiva atunci* $(f(a_n))$ *este un sir convergent.*

27. Stabiliti natura sirurilor: $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$; $(\sqrt{n})$; $\left(\frac{n}{\ln n}\right)$; $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

28. Aratati ca $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ poate se existe fara ca ambele limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ sa existe.

29. Aratati ca $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ poate se existe fara ca ambele limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ sa existe.

30. Exista siruri Cauchy care sa aiba doua limite diferite? Explicati raspunsul.

31. Aratati ca:

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{n+1} - 2n - 1\right) = 1$

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k^3+k^2\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}} = \frac{1}{4}$

    (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}2^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{n}3^{-k}} = \frac{4}{3}$

    (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2 4^k}{(k+1)(k+2)} = \infty$

32. Fie $0 < a < 1$. Dovediti ca

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$

33. Demonstrati ca sirul $(\sqrt[n]{n})_{n\geq 2}$ este descrescator si are limita 1.

Indicatie. Aratati ca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n$ pentru n suficient de mare, apoi ca $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}}$.

34. Demonstrati **Teorema lui Heine**:

    Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie si a un punct de acumulare al multimii A. Atunci exista $L := \lim\limits_{x\to a} f(x)$ daca si numai daca [pentru orice sir $(a_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatile: $a_n \in A \setminus \{a\}$ pentru orice $n \geq 1$ si $a_n \to a \Longrightarrow f(a_n) \to L$].

35. Aratati ca

    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1-k^{-2}\right) = -\ln 2$.

    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) = \frac{1}{4}$.

    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=0}^{p} k^i\right)^{-\frac{1}{p}} = 1$, unde $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

    (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} k\left(\sqrt{k^3+k}-k\right)^{-1} = \infty$.

36. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un sir de numere reale.. Sa se arate ca (a_n) este strict monoton (i.e. strict crescator sau strict descrescator) daca si numai daca $(a_n - a_{n+1})(a_{n+1} - a_{n+2}) > 0 \forall n \geq 1$.

37. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un sir de numere reale. Este adevarata afirmatia: "(a_n) este monoton daca si numai daca $(a_n - a_{n+1})(a_{n+1} - a_{n+2}) \geq 0\ \forall n \geq 1$"?

38. Sa se arate ca sirurile $\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$ si $\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)$ sunt divergente.

39. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un sir definit prin recurenta: $a_0 \neq 0$, $a_n = arctga_{n-1}$, pentru orice $n \geq 1$. Sa se calculeze limita sa.

40. Sa se arate ca nu exista siruri strict crescatoare de numere naturale $(a_n)_{n\geq 1}$ cu propritatea ca $a_n + a_m = a_{nm}$ pentru orice $n, m \in \mathbb{N}^*$.

41. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Sa se arate ca

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = l$, unde $l = 0$ daca $|a| < 1$, $l = \infty$ daca $a > 1$ si $l = 1$ daca $a = 1$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left|a^2-1\right|+|a+2|e^{an}}{|a+3|+|(a-1)(a-2)|e^{an}} = l$, unde $l = 0$ daca $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$, $l = \infty$ daca $a \in \{-3, 2\}$ si $l = \left|\frac{a^2-1}{a+3}\right|$ daca $a \in \mathbb{R}_-^* \setminus \{-3\}$.

(c) Sirul $\left(\frac{na+(-1)^n}{na-(-1)^n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n+(-a)^n}{(a+b)^n} = 0$, unde $a, b > 0$.

(e) Daca $|a|, |b| < 1$ sau $|a|, |b| > 1$ sirul $\left(\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}\right)_{n\geq 1}$ este divergent daca si numai daca $1 < |b| < |a|$ si $ab > 0$.

42. Sirul $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita $a \in \mathbb{R}$. Sa se arate ca $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[5]{a_n} = \sqrt[5]{a}$.

43. Sa se arate ca

(a) $$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n!(n+2k)!}{(n+k)!}\right]^{n^\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{daca } \alpha < 1 \\ e^{k^2} & \text{daca } \alpha = 1 \\ \infty & \text{daca } \alpha > 1 \end{cases}$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2+4k+1}{k^2+4k+3}\right)=\frac{5}{6}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{\alpha+\beta\sqrt{n+1}+\gamma\sqrt{n+2}}{\alpha+\beta\sqrt{n+2}+\gamma\sqrt{n+3}}=-\frac{1}{2}$ pentru orice $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}_+^*$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{n^k+1}+1}=1$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n^2+k}+k\right)^{-1}=0.$

The Title for ETP (Electronic Technical Publishing) Typesetting Style

The Author

The Date

CT

Contents

A

0.1 Serii de numere reale

Seriile sunt extinderi naturale si riguroase ale sumelor finite. Fundamentam astfel prin notiunea de "serie" sintagma "suma cu un numar infinit de termeni" folosind limita

unui sir de sume finite. Astfel, seriile sunt cazuri particulare de siruri. In consecinta tot ce s-a tratat in precedentul capitol este valabil pentru serii. In plus vom da noi criterii de convergenta specifice doar seriilor.

B

0.1.1 2.1. Definitia unui serii. Convergenta si divergenta

Desigur, este imposibil sa adunam un numar infinit de termeni, in general. De aceea vom apela la notiunea de limita pentru a defini riguros o "suma infinita".

Definitia 2.1.1. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un sir de numere reale. Definim cu ajutorul acestuia sirul* $(s_n)_{n\geq 1}$ *astfel:*

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots, s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \cdots$$

Sirul astfel definit, adica sirul $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\geq 1}$, *se numeste **serie** cu **termenul general*** a_n *si se noteaza cu unul dintre simbolurile*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n\geq 1} a_n,\ a_1 + a_2 + \cdots,\ \textit{sau, cand nu exista pericol de confuzie,}\ \sum a_n.$$

Suma $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *se numeste **suma partiala** de ordinul* n *a seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Spunem ca seria* $\sum a_n$ *este **convergenta** daca sirul sumelor sale partiale este convergent; in caz contrar spunem ca aceasta serie este **divergenta**. A studia **natura unei serii** inseamna a investiga daca seria este convergenta sau divergenta. Limita* S *-finita sau infinita- a sirului sumelor partiale, daca exista, se numeste **suma seriei**; identificam,*

in acest caz, simbolul seriei cu suma sa, adica scriem $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *sau, echivalent,* $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Altfel spus, o serie este sirul sumelor partiale.

Seriile al caror indice de insumare nu porneste de la 1 se definesc analog.

In matematica si in aplicatiile in inginerie seriile joaca un rol important, indeosebi in estimarea aproximativa a unor valori imposibil de determinat exact. De aceea suntem interesati de doua probleme esentiale legate de o serie data: **natura seriei si estimarea exacta sau aproximativa a sumei.**

Observatia 2.1.1. *Este important de subliniat ca natura unei serii nu este afectata de modificarea unui numar finit de termeni; in schimb, daca seria este convergenta, suma sa este afectata de eventuale modificari ale termenilor.*

Observatia 2.1.2. *Seria* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este divergenta daca si numai daca*

$$\lim_{n\to\infty} s_n \underset{n\to\infty}{\text{ nu exista}}, \ \lim_{n\to\infty} s_n = \infty, \ \textit{sau} \ \lim_{n\to\infty} s_n = -\infty.$$

Observatia 2.1.3. *Daca* m *este un intreg pozitiv fixat si* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este o serie numerica, atunci seria* $\sum_{n\geq m+1} a_n$ *se numeste* ***restul de ordinul*** m *a seriei date. Desigur, seria* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *este convergenta daca si numai daca restul sau (de orice ordin) este convergent; in acest caz avem egalitatea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$.

Exemplul 2.1.1. Pentru seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ suma partiala de ordinul n este $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$; deci suma sa este egala cu 1, adica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. In schimb $\sum\limits_{n=13}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{13}$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = s_{12} + \sum\limits_{n=13}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Seriile geometrice, pe care le definim mai departe, sunt serii de mare importanta practica. Ele sunt utilizate de multe ori la studiul naturii altor serii, prin asa numitele criterii de comparatie.

Teorema 2.1.1. Serii geometrice. *Fie $a, q \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Atunci* ***seria geometrica*** *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n = aq + aq^2 + \cdots$ este convergenta daca si numai daca $|q| < 1$; in acest caz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$.*

Demonstratie. Deoarece suma partiala de ordinul n este suma unei progresii geometrice cu ratia q avem

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} aq^k = \begin{cases} an, \text{ daca } q = 1 \\ a\frac{1-q^n}{1-q}, \text{ daca } q \neq 1 \end{cases}$$

Concluzia teoremei decurge imediat din faptul ca $\lim\limits_{n\to\infty} a \cdot n = signa \cdot \infty$, si din faptul ca pentru $q \neq 1$ sirul (q^n) este convergent -si are limita 0- daca si numai daca $|q| < 1$.■

Observatia 2.1.4. *Daca in seria geometrica primul indice este 0 atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots$ chiar daca $q = 0$, deci convenim ca $0^0 := 1$.*

Exemplul 2.1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 2$. Deci seria este convergenta si suma sa este 2.

Exemplul 2.1.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$. Deci seria este convergenta si suma sa este 3. De altfel seria noastra este restul de ordinul 1 al seriei de la exemplul precedent.

Exemplul 2.1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$. Deci seria este divergenta si suma sa este ∞.

Exemplul 2.1.5. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ este divergenta si nu are suma, deoarece sirul sumelor partiale nu are limita.

Exemplul 2.1.6. Restul de ordinul 13 al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{13^n}$ este $\sum\limits_{n=14}^{\infty}\frac{1}{13^n} = \frac{1}{13^{14}}\frac{1}{1-\frac{1}{13}} = \frac{1}{13^{13}\cdot 14}$.

Un prim criteriu de convergenta pentru serii cu termeni pozitivi decurge imediat din teorema sirurilor monotone.

Propozitia 2.1.1. *Fie $a_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergenta daca si numai daca sirul sumelor partiale este superior marginit.*

O teorema cu demonstratie simpla, dar deseori extrem de utila la stabilirea divergentei unei serii este testul limitei.

Teorema 2.1.2. Testul limitei. *Daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergenta atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Demonstratie. Deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergenta rezulta ca

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.\blacksquare$$

Exemplul 2.1.7. Conform testului limitei si exercitiului 35 de la capitolul precedent, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$ este divergenta.

Implicatia inversa (in testul limitei) nu este adevarata, dupa cum rezulta din urmatorul contraexemplu.

Exemplul 2.1.8. Seria armonica $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *este divergenta, iar termenul sau general tinde la zero.*

Intr-adevar sumele partiale de ordinul n, $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, formeaza un sir crescator. Daca vom arata ca (s_n) are un subsir (s_{i_n}) nemarginit urmeaza imediat ca (s_n) - deci seria armonica - este divergenta. Alegem $i_n = 2^n$. Avem

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{2^n}\frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\frac{1}{k} \geq 1 + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\frac{1}{2^{k+1}} \geq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k\frac{1}{2^{k+1}} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \to \infty$$

si afirmatia este dovedita. Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$.

Extindem seria armonica astfel:

Teorema 2.1.3. Seria armonica generalizata $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *este convergenta daca si numai daca* $\alpha > 1$.

Demonstratie. Daca $\alpha \leq 1$ atunci $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$ pentru orice k; deci $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ si, cum seria armonica este divergenta, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \infty$, i.e. seria armonica generalizata este si ea divergenta.

Fie acum $\alpha > 1$. Sa remarcam ca sirul sumelor partiale $(s_n)_{n\geq 1}$ este strict crescator. Daca aratam ca el este si marginit superior atunci dovedim ca este convergent (teorema sirurilor monotone si marginite). Sa aratam acest lucru folosind tehnica de la exemplul 2.1.8. Avem

$$s_n < s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(2^i)^{\alpha-1}} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \leq$$
$$\leq 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^i} = 1 + \frac{1}{1-2^{\frac{1}{\alpha-1}}} < \infty \blacksquare$$

Incheiem sectiunea cu un criteriu de converganta pentru serii cu termeni pozitivi.

Teorema 2.1.3. Criteriul de condensare a lui Cauchy. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un sir descrescator de numere pozitive. Atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergenta daca si numai daca seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *este convergenta.*

B

0.1.2 2.2. Operatii cu serii convergente

Similar sirurilor, seriile convergente pot fi usor adunate, scazute , multiplicate cu numere. Inmultirea a doua serii este mai complicata; de aceea o tratam separat.

Teorema 2.2.1. Operatii cu serii convergente. *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, doua serii convergente si $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

1. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ este convergenta si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ este convergenta si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.
3. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ este convergenta si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demonstratie.

....$\blacksquare$

O alta proprietate a sumelor finite generalizabila la sumele unor serii convergente este urmatoarea:

Propozitia 2.2.2. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *doua serii convergente astfel incat* $a_n \leq b_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$. *Atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Demonstratie.

....$\blacksquare$

B

0.1.3 2.3. Criterii pentru serii cu termeni oarecare

Criteriul general de convergenta a lui Cauchy de la siruri are o exprimare eleganta la serii. Observam ca, pentru seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ diferenta sumelor partiale s_{n+p} si s_n este

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}$$

Obtinem astfel:

Teorema 2.3.1. Criteriul general de convergenta a lui Cauchy. *Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergenta daca si numai daca*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon \forall n \geq n_\epsilon \text{ si } \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci cand semnul termenului general se modifica in functie de indicele de insumare este adesea posibil sa putem dovedi convergenta seriei cu teorema lui Abel.

Teorema 2.3.1. Teorema lui Abel. *Fie $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ si $(u_n)_{n\geq 1}$ doua siruri numerice astfel incat*

(i) $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ este un sir descrescator de numere pozitive cu limita nula, i.e. $\alpha_n \searrow 0$;

(ii) exista o constanta pozitiva M astfel ca $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$ este convergenta.

.... $\blacksquare$

O consecinta a teoremei lui Abel este criteriul lui Leibniz pentru seriile alternate.

Definitia 2.3.1. *Spunem ca seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ *este o* ***serie alternata*** *daca* $u_n \cdot u_{n+1} < 0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. Deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n |u_n|$ sau $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} |u_n|$.

Luand acum $u_n = (-1)^n$ in teorema lui Abel obtinem (pentru $M = 1$) urmatorul corolar.

Consecinta. Criteriul lui Leibniz. *Daca* $\alpha_n \searrow 0$ *atunci seria alternata* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$ *este convergenta.*

B

0.1.4 2.4.Absolut convergenta si convergenta neconditionata

O clasa importanta de serii numerice este aceea a seriilor absolut convergente.

Definitia 2.4.1. *Spunem ca seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este o* ***serie absolut convergenta*** *daca seria modulelor* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *este o serie convergenta.*

Absolut convergenta implica convergenta.

Teorema 2.4.1. *O serie absolut convergenta este o serie convergenta. Daca* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *este o serie absolut convergenta atunci*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Demonstratie. Vom folosi criteriul general de convergenta a lui Cauchy de

doua ori. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie absolut convergenta. Fie $\epsilon > 0$. Conform criteriului general de convergenta a lui Cauchy rezulta ca exista un rang $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots |a_{n+p}| < \epsilon \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \geq 1.$$

de aici rezulta ca

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots |a_{n+p}| < \epsilon \forall n \geq n_\epsilon, \forall p \geq 1.$$

Prin urmare, conform criteriului general de convergenta a lui Cauchy rezulta ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergenta.

Deoarece $\lim_{n\to\infty} |a_0 + a_1 + \cdots a_n| \leq \lim_{n\to\infty} |a_0| + |a_1| + \cdots |a_n|$ urmeaza imediat ca $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.■

Desigur, reciproca acestei teoreme este falsa, dupa cum arata urmatorul contraexemplu.

Exemplul 2.4.1. Seria armonica generalizata $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha}$ este absolut convergenta daca $\alpha > 1$; in schimb daca $\alpha \in (0, 1]$ ea este convergenta fara sa fie absolut convergenta.

S-a incetatenit (prin abuz de limbaj) termenul de serie semiconvergenta.

Definitia 2.4.3. *O serie care este convergenta dar nu este absolut convergenta poarta numele de* ***serie semiconvergenta****.*

Exemplul 2.4.2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n}$, unde $\alpha < 0$, este semiconvergenta.

Natural, inmultirea seriilor trebuie sa fie similara inmultirii sumelor finite. Aceasta remarca ne conduce la definirea produsului Cauchy a doua serii.

Definitia 2.4.2. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *doua serii. Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *unde* $c_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$ *se numeste* ***produsul Cauchy*** *a seriilor* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

Absolut convergenta a doua serii atrage absolut convergenta produsului Cauchy. Mai mult:

Teorema 2.4.2. Teorema produsului Cauchy. *Daca seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *sunt absolut convergente atunci si produsul lor Cauchy este absolut convrgent, iar suma produsului Cauchy este egala cu produsul sumelor celor doua serii, adica* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$

Demonstratie.

....■

Definitia 2.4.3. *Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ***converge neconditionat*** *daca si numai daca pentru orice bijectie* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ *converge si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. *Daca seria converge, dar nu converge neconditionat, spunem ca ea* ***converge conditionat.***

Teorema urmatoare, a carei demonstratie este mai laborioasa si o omitem, afirma echivalenta dintre convergenta neconditionata si convergenta absoluta. Acest fapt este deosebit de util, deoarece in practica este de multe ori mult mai usor de verificat absolut convergenta unei serii decat convergenta tuturor seriilor obtinute prin

rearanjarea termenilor.

Teorema 2.4.3. *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge neconditionat daca si numai daca ea converge absolut.*

....

Uneori avem nevoie sa descompunem o serie in mai multe parti. Pentru o asemenea rearanjare folosim seriile duble. Pentu simplitate vom analiza aici doar convergenta seriilor duble cu termeni nenegativi.

Definitia 2.4.4. *Pentru orice* $i, j \in \mathbb{N}$ *definim perechea* $(i,j) = \{i, \{i,j\}\}$ *si definim* $\mathbb{N}\times\mathbb{N} := \{(i,j)\,|i,j \in \mathbb{N}\}$. *O* ***familie (dublu indexata)*** *de numere* $\left\{a_{(i,j)}\right\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ *este o functie definita pe* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *cu valori in* $\mathbb{R}$. *Spunem ca* **seria dubla** $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{(i,j)}$ **este convergenta** *daca si numai daca pentru orice* $i \in \mathbb{N}$ *seria* $\sum_{j=0}^{\infty} a_{(i,j)}$ *este convergenta si, in plus, seria* $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{(i,j)}\right)$ *este de asemenea convergenta. Uneori scriem* $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$ *in loc de* $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{(i,j)}$.

Teorema 2.4.4. *Fie* $\left\{a_{(i,j)}\right\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ *o familie de numere nenegative. Atunci seria dubla* $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{(i,j)}$ *este convergenta daca si numai daca pentru orice bijectie* $\sigma : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *seria* $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(i,j)}$ *este convergenta. In acest caz sumele lor coincid.*

B

0.1.5 5. Serii cu termeni pozitivi

Criteriile de convergenta pe care le insiram mai departe se pot folosi nu numai pentru seriile cu termeni pozitivi ci si pentru a analiza absolut convergenta unor serii al caror termen general are semnul variabil.

Teorema 2.5.1. Criterii de comparatie. *Fie doua serii* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *cu termeni pozitivi.*

1. **Criteriul I.** *Daca exista in numar natural* n_0 *astfel incat* $a_n \leq b_n$ *pentru orice* $n \geq n_0$ *atunci*

   (a) *convergenta seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *implica convergenta seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$;

   (b) *divergenta seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *implica divergenta seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

   ....

2. **Criteriul II.** *Presupunem ca exista* $l := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

   (a) Daca l este finita si nenula (i.e. $l \in (o, \infty)$) atunci cele doua serii au aceeasi natura.

   (b) Daca $l = 0$ si seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ este convergenta atunci si seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergenta.

(c) Daca $l = \infty$ si seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ este divergenta atunci si seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergenta.

....

3. **Criteriul III.** *Daca exista in numar natural n_0 astfel incat $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ pentru orice $n \geq n_0$ atunci*

   (a) *convergenta seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ implica convergenta seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$;*

   (b) *divergenta seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ implica divergenta seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.*

....

Teorema 2.5.2. Testul raportului (D'Alembert). *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Daca exista $q < 1$ astfel incat $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pentru orice n atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergenta.*

2. *Daca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pentru orice n atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergenta.*

3. *Sa presupunem ca exista $l := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.*

   (a) *Daca $l < 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergenta.*

   (b) *Daca $l > 1$ atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergenta.*

....

Teorema 2.5.3. Testul radicalului (Cauchy). *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Daca exista* $q < 1$ *astfel incat* $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ *pentru orice* n *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergenta.*

2. *Daca* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *pentru orice* n *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este divergenta.*

3. *Sa presupunem ca exista* $l := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

   (a) *Daca* $l < 1$ *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergenta.*

   (b) *Daca* $l > 1$ *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este divergenta.*

....

Teorema 2.5.4. Criteriul lui Kummer. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi . Presupunem ca exista un sir de numere pozitive* $(\alpha_n)_{n\geq o}$ *si un numar natural* n_0 *astfel incat*

1. *exista* $q > 0$ *iar* $\alpha_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha_{n+1} \geq q$ *pentru orice* $n \geq n_0$; *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergenta.*

2. $\alpha_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha_{n+1} \leq 0$ *pentru orice* $n \geq n_0$; *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este divergenta.*

....

Consecinta. Testul Raabe-Duhamel. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi si* n_0*.un numar natural.*

1. *Daca exista exista* $q > 1$ *astfel incat* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q$ *pentru orice* $n \geq n_0$ *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergenta.*
2. *Daca* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ *pentru orice* $n \geq n_0$ *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este divergenta.*
3. *Sa presupunem ca exista* $l := \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.
   (a) *Daca* $l > 1$ *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este convergenta.*
   (b) *Daca* $l < 1$ *atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *este divergenta.*

....

B

0.1.6 6. Calculul aproximativ al sumelor unor serii convergente

Sumele seriilor convergente ce apar in tehnica nu se pot calcula exact, in general. Dar, folosind estimari adecvate ale restului unei asemenea serii, putem calcula suma acesteia cu acuratetea ceruta de problema concreta cu ajutorul sumelor partiale. In

acest paragraf trecem in revista cateva modalitati de estimare a restului si de aproximare a sumelor unor serii convergente.

Reamintim ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ are aceeasi natura cu seria $r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m$ (restul de ordinul n). In plus

$$\text{seria } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ este convergenta daca si numai daca } \lim_{n\to\infty} r_n = 0;$$

in acest caz $s = s_n + r_n$, unde s este suma seriei, iar s_n este suma partiala de ordinul n. Cu alte cuvinte putem spune ca, daca n este suficient de mare, suma partiala de ordin n aproximeaza suma exacta s. Scriem

$$s_n \approx s$$

si, in acest caz, spunem ca s_n **aproximeaza suma** s, iar **eroarea** in aceasta aproximare este $|r_n|$.

Prima estimare o facem pentru seriile a caror convergenta o putem stabili cu testul raportului.

Teorema 2.6.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Presupunem ca exista* $q < 1$ *astfel incat* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Atunci suma restului de ordin n verifica inegalitatea*

$$r_n \le \frac{a_{n+1}}{1-q} \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstratie.

....

Daca putem stabili convergenta unei serii cu testul radicalului, estimarea restului este similara.

Teorema 2.6.2. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Presupunem ca exista* $q < 1$ *astfel incat* $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Atunci*

$$r_n \leq \frac{a_{n+1}}{1-q} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstratie.

....

Pentru seriile alternate care verifica ipoteza criteriului lui Leibniz termenul de ordin $n+1$ asigura o estimare a restului de ordin n.

Teorema 2.6.3. *Daca* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \alpha_n$ *este o serie alternata,* $\alpha_n \searrow 0$, *iar* r_n *este restul de ordinul* n *atunci*

$$|r_n| \leq \frac{\alpha_{n+1}}{1-q} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstratie.

....

B

0.1.7 7. Exercitii

1. Fie $m \in \mathbb{N}$ si $a_n \in \mathbb{R}$ pentru orice $n \geq m$. Definiti seria $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

2. Scrieti termenul general pentru seriile:

   (a) $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9} + \cdots$

   (b) $\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \frac{7}{9} + \cdots$

   (c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \cdots$

   (d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \cdots$

   (e) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \cdots$

   (f) $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{8} + \cdots$

   (g) $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

   (h) $\frac{1}{3!} - \frac{3}{5!} + \frac{5}{7!} - \frac{7}{9!} + \cdots$

   (i) $\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots$

3. Calculati (daca exista) sumele seriilor:

   (a) $2 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-3n}$.

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{3n}}{4^{3n+1}}$.

   (d) $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots$

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{4^{n+2}}$.

(f) $2 + 2^{-1} + 2^{1} + 2^{-2} + 2^{2} + \cdots$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \geq 1$.

4. Dati un exemplu de doua serii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergente pentru care seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ este convergenta.

5. Verificati conditia necesara de convergenta (testul limitei) pentru seriile de mai jos.

   (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots$

   (b) $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \cdots$

   (c) $\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \cdots$

   (d) $\sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \cdots$

   (e) $\sin \pi\sqrt{2} + \sin \pi\sqrt{5} + \sin \pi\sqrt{10} + \sin \pi\sqrt{17} + \cdots$

6. Este posibil ca doar una dintre seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sa fie divergenta iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ sa fie convergenta?

7. Este posibil ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ (unde $\alpha \in \mathbb{R}$) sa fie convergenta iar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sa fie divergenta?

8. Convertiti fiecare dintre urmatoarele numere in fractii. Aici bara deasupra unui grup de cifre indica periodicitatea grupului respectiv.

   (a) 0,123;

   (b) $0,\overline{333}$;

   (c) $0,\overline{31}$;

   (d) $0,1\overline{33}$;

   (e) $0,00\overline{123}$.

9. Demonstrati Propozitia 2.1.1.

10. Calculati sumele seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

   (a) $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

   (b) $a_n = \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \leq 1$;

   (c) $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$;

   (d) $a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+1}$;

   (e) $a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$;

   (f) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

   (g) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = 0$;

   (h) $a_n = n^\alpha \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right), \alpha \leq \frac{2}{3}$;

(i) $a_n = \frac{1}{n \cdot n!}\left(1! + 2! + \cdots n!\right)$.

11. Demonstrati Propozitia 2.2.2.

12. Studiati natura seriilor de mai jos folosind criterii de comparatie adecvate ori testul limitei.

(a) $2 - 2 + 2 - 2 + \cdots$

(b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots$

(c) $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \cdots$

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \cdots$

(e) $\frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{104} + \frac{1}{1004} + \cdots$

(f) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 5}} + \cdots$

(g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{2^3 \cdot 4}} + \frac{1}{\sqrt{2^4 \cdot 5}} + \cdots$

(h) $\frac{3}{4^2} + \frac{4}{5^2} + \frac{5}{6^2} + \cdots$

(i) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}} + \cdots$

13. Explicati de ce din faptul ca din $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ rezulta ca seria $\sum a_n$ este divergenta.

14. Studiati natura seriilor de mai jos folosind criteriul raportului.

(a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}} + \cdots$

(b) $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{4}} + \frac{7}{\sqrt{8}} + \cdots$

(c) $\frac{2}{1} + \frac{2\cdot 5}{1\cdot 5} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9} + \cdots$

15. Demonstrati criteriul de condensare a lui Cauchy.

    Indicatie. Folositi ideea demonstratiei facute la seria armonica.

16. Demonstrati ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergenta daca si numai daca sirul $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{k\geq 1}$ este marginit.

17. Studiati natura seriei cu ajutorul criteriului radicalului.

    (a) $\frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots$

    (b) $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + \left(\frac{4}{11}\right)^7 + \cdots$

18. Aratati ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ este convergenta aratand ca sirul sumelor partiale este fundamental.

    Indicatie. Aratati ca $\left|\sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Atentie la faptul ca m si n pot fi impari sau pari!

19. Studiati natura seriei.

    (a) $\frac{1}{2!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \frac{5}{6!} + \cdots$

    (b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \cdots$

    (c) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 13} + \cdots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{(n^2+1)^{\sqrt{3}}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{3}}}{(n^2+1)^{\sqrt{2}}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{3n^2+1}\right)^n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{3n^2+1}\right)^{-n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n^2+1}\right)^n$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n - \sqrt[3]{\ln^2 n}}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n} - \sqrt[4]{n^3}}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4} - \sqrt[4]{n^3}}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{\pi^n}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\pi^n}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{\pi^n}$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{\pi^n}$

(s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{\pi^n}$

(t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

(u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2$

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^{\frac{1}{2}}.$

20. Aratati ca sirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent daca si numai daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ este convergenta si ca, in acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$.

21. Folositi propozitia 2.1.1. pentru a demonstra teorema sirurilor monotone.

22. Studiati natura seriei cu termenul general a_n.

(a) $a_n = a^n, a > 0$

(b) $a_n = a^{-n}, a > 0$

(c) $a_n = \frac{a^n}{b^n}, a, b > 0$

(d) $a_n = \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ unde $x, \alpha \in \mathbb{R}$

(e) $a_n = \frac{arctgn!x}{2^n}$ unde $x \in \mathbb{R}$

(f) $a_n = n^{-1}\sqrt[n]{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, unde $a > 0$

(g) $a_n = \frac{n}{(2n+1)!!}$

(h) $a_n = arctg\frac{1}{n^2+n+1}$

(i) $a_n = 3^{n-1}\sin\frac{x}{3^n}$, unde $x \in \mathbb{R}$

(j) $a_n = a^{n^2}, a \in \mathbb{R}$

23. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergenta si $(n_k)_{k\geq 0}$ un sir strict crescator de numere naturale cu $n_0 = 1$. Fie $A_k := \sum\limits_{i=n_{k-1}}^{n_k - 1} a_i$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Aratati ca seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ este convergenta si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

24. Studiati convergenta seriilor de mai jos.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^2$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{-2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

(e) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 4}} + \frac{1}{\sqrt{4\cdot 7}} + \frac{1}{\sqrt{7\cdot 10}} + \frac{1}{\sqrt{10\cdot 13}} + \cdots$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \sqrt[3]{\frac{n}{n^3+1}}$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3+1}$

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \sqrt[3]{\frac{n^3}{n^3+1}}$

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$

(l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$

(m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n \cdot n!}{n^n}$.

25. Sa se studieze natura seriei armonice generalizate $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ folosind testul limitei si criteriul de condensare a lui Cauchy.

26. Determinati suma seriei.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |a|^n$, $a \in \mathbb{R}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(a+2)...(a+n)}{(b+1)(b+2)...(b+n)}, a-b<1$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ stiind ca $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ stiind ca $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

27. Aratati ca sirul $(c_n)_{n\geq 1}$, unde $c_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ este convergent si limita sa, notata cu c si numita **constanta lui Euler**, este in intervalul $(0,1)$. Demonstrati apoi ca $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} = c$.

28. Studiati convergenta seriilor urmatoare.

(a) $\frac{\ln 2}{3} + \frac{\ln 4}{5} + \frac{\ln 6}{7} + \cdots$

(b) $\frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 4}{5} + \frac{\ln 6}{7} - \cdots$

(c) $\frac{\ln 2}{3^2} + \frac{\ln 4}{5^2} + \frac{\ln 6}{7^2} + \cdots$

(d) $\frac{\ln 2}{3^2} - \frac{\ln 4}{5^2} + \frac{\ln 6}{7^2} - \cdots$

(e) $\left(\frac{\ln 2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\ln 4}{5}\right)^2 + \left(\frac{\ln 6}{7}\right)^2 + \cdots$

(f) $\left(\frac{\ln 2}{3}\right)^2 - \left(\frac{\ln 4}{5}\right)^2 + \left(\frac{\ln 6}{7}\right)^2 - \cdots$

(g) $\frac{2}{3^2} + \frac{4}{5^2} + \frac{6}{7^2} + \cdots$

(h) $\frac{2}{3^2} - \frac{4}{5^2} + \frac{6}{7^2} - \cdots$

(i) $\frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{6}{3^4} + \cdots$

(j) $\frac{2}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \frac{6}{3^4} - \cdots$

(k) $\frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{6}{3^4} + \cdots$

29. Demonstrati ca suma a doua serii absolut convergente este o serie care converge absolut.

30. Este posibil sa decidem natura seriilor de mai jos folosind criteriul lui Leibniz? Analizati daca aceste serii sunt absolut convergente, semiconvergente sau divergente.

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \cdots$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}^3} - \frac{1}{\sqrt{3}^3} + \frac{1}{\sqrt{4}^3} - \frac{1}{\sqrt{5}^3} + \cdots$

(d) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \cdots$

(e) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \cdots$

(f) $\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \cdots$

31. Dati un exemplu de serie absolut convergenta a carei suma nu coincide cu suma seriei modulelor.

32. Intre graficele functiilor $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$, $g(x) := \frac{1}{x^2}$ ducem segmente echidistante, paralele cu axa Oy. Este suma distantelor dintre aceste segmente - consecutive si aflate la stanga punctului lor de intersectie- finita? Dar a celor aflate la dreapta acestui punct?

33. Rezolvati problema precedenta pentru functiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x^3}$, $g(x) := \frac{1}{x^2}$.

34. Studiati natura seriilor, a sumei si a diferentei lor.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{2^n}$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n^2}{2^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^2}$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n^2}{n^2}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

35. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie absolut convergenta si $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ un sir marginit. Dovediti ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n$ converge absolut.

36. Studiati natura produsului seriilor de mai jos.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{2^n}$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n-n^2}{2^n}$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^2}$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n-n^2}{n^2}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.

37. Evaluati eroarea comisa prin inlocuirea sumei seriei cu suma primilor 100 de termeni.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

38. Determinati suma seriei $\sqrt[3]{x}+(\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{x})+(\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x})+(\sqrt[9]{x}-\sqrt[7]{x})+\cdots$, unde $x \in \mathbb{R}$.

39. Cati dintre termenii seriei trebuie insumati astfel ca eroarea (comisa prin inlocuirea sumei seriei cu suma finita corespunzatoare) sa fie mai mica decat 10^{-2}.

(a) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots$

(b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots$

(c) $-\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \cdots$

(d) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \cdots$

The Full Title of an AMS Book or Monograph

The Author

Author Two

(A. U. Thor) Author address line 1, Author address line 2

Current address, A. U. Thor: Author current address line 1, Author current address line 2

E-mail address, A. U. Thor: `author@institute.edu`

URL: `http://www.author.institute`

Dedicated to the memory of S. Bach.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 05C38, 15A15; Secondary 05A15, 15A18

The Author thanks V. Exalted.

ABSTRACT. Replace this text with your own abstract.

Contents

Part 1

FUNCTII DE O SINGURA VARIABILA REALA

CHAPTER 1

1.SIRURI

//

CHAPTER 2

2. SERII NUMERICE

//

CHAPTER 3

3. FORMULA LUI TAYLOR

Teorema lui Taylor (dupa numele matematicianului Brook Taylor care a dat o versiune a teoremei in 1712) -teorema care ne ofera formula lui Taylor- este un instrument fundamental in analiza matematica si in diversele sale aplicatii in inginerie. Cea mai importanta dintre acestea ofera posibilitatea aproximarii, in anumite conditii, a unei functii cu o functie polinomiala, facilitand astfel calculul computerizat.

1. 3.1. Despre aproximarea functiilor

Multe probleme nu pot fi rezolvate exact. De aceea este firesc ca aceste probleme sa fie inlocuite cu probleme "apropiate" rezolvabile exact, iar eroarea provenita din inlocuirea solutiei exacte cu solutia problemei "apropiate" sa poata fi estimata. Aceasta este problema *Analizei numerice,* un capitol al *Analizei matematice* cu vaste aplicatii in practica de zi cu zi. Aproximarea limitei a a unui sir convergent cu termenul de ordinul n - sa zicem a_n - este acceptabila daca eroarea $|a - a_n|$ este mai mica decat un numar prestabilit - sa zicem ϵ; scriem in acest caz $a \approx a_n$ si spunem ca a este **aproximativ egal** cu a_n, eroarea aproximarii fiinnd mai mica decat ϵ. Aceasta a fost tehnica pe care am folosit-o in aproximarile de la serii numerice.

Sa consideram acum ca I este un interval de numere reale I (i.e. I este de forma $(\alpha, \beta), [\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta], [\alpha, \infty), (\alpha, \infty)$, etc.) ca $a \in I$ si ca $f : I \to \mathbb{R}$ este o functie. Fie acum $x \in I$. Cea mai grosolana aproximare a valorii $f(x)$ este $f(a)$, adica aproximarea cu o constanta: $f(x) \approx f(a)$. Eroarea in acest caz este $|f(x) - f(a)|$, poate fi foarte mare si, in general este greu de estimat.

Daca $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ este continua, derivabila pe (a, x) atunci, conform teoremei lui Lagrange, exista $c \in (a, x)$ astfel incat $f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Deci $f(x) = f(a) + (x - a) f'(c)$. Daca, in plus derivata este o functie continua pe $[a, x]$ atunci exista $M \geq 0$ astfel ca $|f'(t)| \leq M$ pentru orice $t \in [a, x]$. Prin urmare avem o estimare a erorii in aproximarea $f(x) \approx f(a)$ data prin inegalitatea $|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|$.

Teorema lui Taylor extinde in mod natural teorema lui Lagrange oferindu-ne oportunitatea aproximarii controlate a unei functii cu un polinom (functie polinomiala) de grad n.

2. 3.2. Teorema lui Taylor

Teorema lui Taylor extinde in mod natural teorema lui Lagrange oferindu-ne oportunitatea aproximarii controlate a unei functii cu un polinom (functie polinomiala) de grad n- polinomul lui Taylor de grad n.

Definitia 3.2.1. *Fie I un interval si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila de n ori in $a \in I$,* unde $n \in \mathbb{N}$. *Functia polinomiala $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grad mai mic sau egal cu n definita prin*

$$T_n(x) := f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

sau, pe scurt,

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

se numeste ***polinomul Taylor de grad*** **n** *(asociat functiei f in punctul a). (Am convenit ca derivata de ordin 0 este chiar functia, adica $f^{(0)} = f$ si ca $(x-a)^0 = 1$ chiar daca $x = a$.) Daca $a = 0$* atunci *T_n se numeste* ***polinomul Maclaurin*** *de grad n (dupa scotianul Colin Maclaurin)*

Functia $R_n : I \to \mathbb{R}$ definita prin

$$R_n(x) := f(x) - f(a)$$

se numeste **restul de ordin** *n (asociat functiei f in punctul a). Daca $a = 0$* atunci *R_n se numeste* ***restul Maclaurin*** *de ordin n*

Observatia 3.2.1. Restul de ordin n indica eroarea pe care o facem in aproximarea $f(x) \approx T_n(x)$, adica atunci cand inlocuim valoarea exacta $f(x)$ cu valoarea aproximativa $T_n(x)$. In cazul $n = 0$ avem $T_n(x) = f(a)$, iar daca sunt indeplinite conditiile din teorema lui Lagrange exista $c \in I$ astfel incat $R_n(x) = (x-a) f'(c)$.

Prin inductie matematica se arata ca:

Propozitia 3.2.1. *Daca f este o functie polinomiala de grad n atunci polinomul Taylor de grad n asociat coincide cu f.*

Similar se arata ca

Propozitia 3.2.2. *Fie f este o functie derivabila de n ori in a si $T_n(x)$ polinomul Taylor asociat. Atunci $f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a)$ pentru $k = 0, 1, ..., n$.*

Teorema care urmeaza ne da o estimare -similara celei date de teorema lui Lagrange -a erorii din aproximarea $f(x) \approx T_n(x)$ pentru un n natural oarecare.

Teorema 3.2.1. ***Teorema lui Taylor cu rest Lagrange.*** *Fie I un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila de $n+1$ ori si $a, x \in I, a \neq x$. Atunci exista un numar ξ intre a si x (adica $\xi \in (\min(a,x), \max(a,x))$) astfel incat*

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$$

Restul de ordinul n in aceasta forma se numeste ***restul Lagrange*** *iar formula*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$$

se numeste **formula lui Taylor de ordin n cu rest Lagrange**.

Demonstratie.

.... ■

Daca $a = 0$ obtinem formula lui Maclaurin.

Consecinta. 3.2.1. Formula Maclaurin. *Fie I un interval astfel ca $0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila de $n+1$ ori si $x \in I \setminus \{0\}$. Atunci exista un numar ξ intre 0 si x (adica $\xi \in (\min(0,x), \max(0,x))$) astfel incat*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\, x^{n+1}.$$

O generalizare a teoremei de mai sus este urmatoarea.

Teorema 3.2.2. ***Teorema lui Taylor.*** *Fie I un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila de $n+1$ ori, $a, x \in I, a \neq x$ si $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci exista un numar ξ intre a si x (adica $\xi \in (\min(a,x), \max(a,x))$) astfel incat restul de ordin n sa fie*

$$R_n(x) = \frac{1}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-\xi)^{n+1-p}\,(x-a)^p$$

Observatia 3.2.2. Daca in teorema de mai sus luam $p = 1$ obtinem **restul Cauchy**: $R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-\xi)^n\,(x-a)$. Cum ξ este intre a si x rezulta ca exista un $\theta \in (0,1)$ astfel incat $\xi = a + \theta(x-a)$. Prin urmare restul Cauchy se poate rescrie sub forma

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))\,(x-a)^{n+1}\,(1-\theta)^n.$$

Definitia 3.2.2. *Fie I un interval si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie. Daca f este continua scriem $f \in C^0(I)$ si spunem ca f este de* **clasa** *C^0 pe I. Daca f are derivata si $f' \in C^0(I)$ (adica f are derivata continua) scriem $f \in C^1(I)$ si spunem ca f este de* **clasa** *C^1 pe I. In general, daca exista derivata de ordin n a functiei $f$si $f^{(n)} \in C^0(I)$ scriem $f \in C^n(I)$ si spunem ca f este de* **clasa** *C^n pe I. Daca $f \in C^n(I)$ pentru orice n (i.e. f este indefinit derivabila) scriem $f \in C^\infty(I)$ si spunem ca f este de* **clasa** *C^∞ pe I.*

Conform teoremei lui Weierstrass, o functie continua pe un compact este mărginită si isi atinge marginile pe acest compact.

Consecinta 3.2.2. *Daca $f \in C^{n+1}[\alpha, \beta]$ si $a \in (\alpha, \beta)$ atunci exista $M > 0$ asfel incat eroarea in aproximarea $f(x) \approx T_n(x)$ sa fie mai mica sau egala decat* $\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$, deci

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Uneori este utila exprimarea restului din formula lui Taylor sub forma integrala.

Teorema 3.2.3. ***Formula lui Taylor cu rest integral.*** *Fie I un interval, $f \in C^{n+1}(I)$ o functie derivabila de $n+1$ ori, $a, x \in I, a \neq x$. Atunci*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{(x-a)^n}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Demonstratie.

.... ■

Observatia 3.2.3. Exista doua modalitati de abordare in practica a erorii data de teorema lui Taylor:

- **a priori**, adica *inainte de estimare:* cand ne dorim o precizie ϵ pe un anumit interval in aproximarea $f(x) \approx T_n(x)$; atunci cautam un rang n astfel incat $|R_n(x)| \leq \epsilon$ pe acest interval;
- **a posteriori**, adica *dupa estimare:* cand polinomul T_n este cunoscut pe un anumit interval si dorim o estimare a erorii in aproximarea $f(x) \approx T_n(x)$.

Exemplul 3.2.1. Sa determinam un rang n astfel incat eroarea in aproximarea Maclaurin $e^x \approx T_n(x)$ sa fie mai mica decat 10^{-4} pe intervalul $[-2, 2]$.

Cum $f^{(k)}(x) = e^x$ pentru orice k natural, rezulta ca $T_n(x) := 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$ si, din teorema lui Taylor, urmeaza ca exista $\xi \in (0, x)$ (sau $\xi \in (x, 0)$) astfel ca $R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$. Deoarece $x \in [-2, 2]$ avem $|R_n(x)| < \frac{e^2}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \frac{9}{(n+1)!}2^{n+1}$. Dorim ca eroarea sa fie mai mica de 10^{-4}, deci impunem ca $\frac{9}{(n+1)!}2^{n+1} \leq \frac{1}{10^4}$. Este suficient sa determinam cel mai mic n care verifiva inegalitatea de mai sus ca sa obtinem acuratetea dorita. Se verifica imediat ca $n = 11$ asigura acest deziderat. Prin urmare putem scrie ca $e^x \approx T_{11}(x)$ si putem spune ca *numarul* $T_{11}(x)$ *aproximeaza numarul* e^x *cu patru zecimale exacte cand* $x \in [-2, 2]$.

Observatia 3.2.4. Nu orice functie poate fi bine aproximata cu polinoame Taylor dupa cum rezulta din urmatorul exemplu.

Exemplul 3.2.2. Se arata ca functia $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ daca } x > 0 \\ 0 \text{ daca } x \leq 0 \end{cases}$ este indefinit derivabila pe $\mathbb{R}$ si ca $f^{(k)}(0) = 0$ pentru orice k natural. Prin urmare polinomul Maclaurin de grad n este functa nula pentru orice n natural, iar restul de ordinul n este $R_n(x) = f(x)$. Cum $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$ aproximarea $f(x) \approx T_n(x) = 0$ este grosiera cand x este mare.

Observatia 3.2.5. Calculatoarele au folosit vreme indelungata polinoamele Taylor pentru calculul aproximativ al unor numere transcendente cu acuratete rezonabila. Acum calculatoarele folosesc diferite scheme de calcul -multe folosind ideea aproximarii Taylor- pentru calculul mai rapid decat cel oferit de polinoamele Taylor. Problema memoriei necesare procesarii unor asemenea scheme ramane una cruciala. Totusi, in cazuri particulare de calcul aproximativ al unor numere transcendente, formula lui Taylor da cele mai bune rezultate din punct de vedere al rapiditatii si a memoriei necesare (vezi exercitiul 2.). Un instrument de aproximare deosebit de puternic - aproximarea cu polinoame trigonometrice- va fi tratat la capitolul *Serii Fourier.*

3. 3. Diferentiabilitate

In aceasta sectiune atasam unei functii care admite derivata de ordin n intr-un punct a monoame de grad $0, 1, ..., n$ asa numitele diferentiale de ordin $0, 1, ..., n$. Astfel obtinem o interpretare mai buna a formulei lui Taylor si pregatim trecerea la functii de mai multe variabile.

Definitia 3.3.1. ***Definitia diferentialei de ordin intai.*** *Fie* $A \subset \mathbb{R}$ *o multime,* a *un punct interior al multimii* A *(adica exista* $\delta > 0$ *astfel ca* $(a - \delta, a + \delta) \subset A$*) si* $f : A \to \mathbb{R}$ *o functie. Spunem ca* f *este* ***diferentiabila*** *in* a *daca si numai*

daca exista o functie liniara $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si o functie* $\omega : A \to \mathbb{R}$ *continua in* a *cu* $\omega(a) = 0$ *astfel incat*

$$f(x) - f(a) = L(x-a) + |x-a|\,\omega(x)$$

pentru orice $x \in A$. *In acest caz notam* $d_a f := L$ *si spunem ca aceasta functie liniara este* **diferentiala functiei** f **in punctul** a *(ori* ***diferentiala de ordinul intai****, notata si* $d_a^1 f$*). Daca* A *este o* ***multime deschisa*** *nevida- adica toate elementele sale sunt puncte interioare- si* f *este diferentiabila in orice* $a \in A$ *spunem ca functia* f *este* **diferentiabila** *(pe* A*), iar functia (de doua variabile)* $df : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita prin* $df(a,h) := d_a f(h)$ *o numim* ***diferentiala (totala a) functiei*** f.

Observatia 3.3.1. *Diferentiala unei functii intr-un punct, daca exista, este unica.*

Observatia 3.3.2. *Diferentiala intr-un punct a unei functii liniare coincide cu acea functie liniara. In particular, daca exista* $d_a f$*, atunci* $d_x d_a f = d_a f$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

Exista o stransa legatura intre diferentiabilitate si derivabilitate, asa cum arata urmatoarea teorema.

Teorema 3.3.1. ***Legatura dintre derivata si diferentiala.*** *Fie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o functie si a un punct interior al multimii* A. *Functia* f *este diferentiabila in* a *daca si numai daca* f*este derivabila in* a. *In acest caz* $d_a f(h) = f'(a) \cdot h$ *pentru orice* $h \in \mathbb{R}$.

Demonstratie.

....■

Observatia 3.3.3. Daca A este o multime deschisa nevida diferentiala functiei identice $1_A := id_A$ (unde, reamintim, $id_A : A \to A$, $id_A(x) = x$) este aplicatia identica pe $\mathbb{R}$. Intr-adevar daca $a \in A$ atunci derivata $(id_A)'(a) = 1$ si, conform teoremei precedente, $d_a id_A(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adica $d_a id_A = id_{\mathbb{R}}$ (vezi si observatia precedenta). De aceea diferentiala functiei identice este numita si **diferentiala variabilei independente** -aici x- si se noteaza dx. Cu aceasta notatie diferentiala functiei f in a este

$$d_a f = f'(a)\,dx$$

Derivata functiei f in punctul a se mai noteaza si $\frac{df}{dx}(a)$; deci facem identificarea

$$f'(a) := \frac{df}{dx}(a).$$

Daca $f : A \to \mathbb{R}$ este diferentiabila (pe A) atunci folosim notatia $df = f'(x)\,dx$ pentru diferentiala totala, iar pentru derivata notatia

$$f' := \frac{df}{dx}.$$

Exemplul 3.3.1. Daca $f(x) = 3x^2 - \sin 2x + arctg\,(1+4x) - \ln\left(1+x^3\right) + e^{5x}$ atunci diferentiala totala este $df = = \left(3x - 2\cos 2x + \frac{4}{1+(1+4x)^2} - \frac{3x^2}{1+x^3} + 5e^{5x}\right) dx$.

Diferentiala functiei in origine este aplicatia liniara definita prin $d_0 f = \left(-2 + \frac{4}{1+1} + 5\right) dx = 5dx$, iar diferentiala functiei in origine calculata in punctul 13 este $d_0 f\,(13) = 5 \cdot 13 = 65$.

Din teorema precedenta rezulta urmatoarele proprietati ale operatorului de diferentiere d.

Propozitia 3.3.1. Proprietati ale operatorului d. *Daca f si g sunt doua functii diferentiabile pe A, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt doua constante si $u : A' \to A$ este o functie diferentiabila atunci*

- $d\left(\alpha f + \beta g\right) = \alpha df + \beta dg$ *- liniaritatea operatorului d;*
- $d\left(fg\right) = f' dg + g' df$ *-diferentiala produsului $f \cdot g$;*
- $d\frac{f}{g} = \frac{f'dg - g'df}{g^2}$ *daca $g\left(x\right) \neq 0, \forall x \in A$- diferentiala catului $\frac{f}{g}$;*
- $d\left(f \circ u\right) = f' du$*- diferentiala compusei $f \circ u : A' \to \mathbb{R}$.*

Exemplul 3.3.2. Daca $f\left(x\right) = tge^{arctg2x}$ atunci diferentiala totala este $df = \frac{1}{\cos^2 e^{arctg2x}} d\left(e^{arctg2x}\right) = = \frac{1}{\cos^2 e^{arctg2x}} e^{arctg2x} d\left(arctg2x\right) = \frac{1}{\cos^2 e^{arctg2x}} e^{arctg2x} \frac{2}{1+4x^2} dx.$ Diferentiala in origine este functia liniara definita prin $d_0 f = \frac{2}{\cos^2 1} dx$. In sfarsit, diferentiala functiei in origine calculata in punctul $\cos^2 1$ este $d_0 f\left(\cos^2 1\right) = 2$.

Observatia 3.3.4. Derivata a doua a functiei $f : A \to \mathbb{R}$ in punctul interior $a \in IntA$ se defineste ca "derivata derivatei". Mai exact, daca $\epsilon > 0$, $\left(a - \epsilon, a + \epsilon\right) \subset A$ este o vecinatate a punctului a, iar f este derivabila pe $\left(a - \epsilon, a + \epsilon\right)$ atunci derivata de ordinul al doilea (derivata a doua) in a este derivata functiei f' in acest punct, adica $f''(a) = \frac{df'}{dx}\left(a\right)$.

Similar introducem **diferentiala a doua**. Expresia "diferentiala diferentialei de ordinul intai" este ambigua (vezi observatia 3.3.2). Vom cere insa diferentiabilitatea functiei pe o vecinatate a punctului a si vom impune diferentiabilitatea in punctul a a functiei $g\left(x\right) := d_x f\left(h\right)$ ca mai jos.

Definitia 3.3.2. Definitia diferentialelor de ordin superior. *Fie $f : A \to \mathbb{R}$ o functie diferentiabila pe o vecinatate V a punctului $a \in IntA$, $h \in \mathbb{R}$. Presupunem ca functia $g : V \to \mathbb{R}$, $g\left(x\right) := d_x f(h) = f'\left(x\right) h$ este diferentiabila in punctul a - deci, conform teoremei 3.3.1, f este derivabila de doua ori in a. In acest caz spunem ca f este* ***diferentiabila de doua ori*** *in a, ori,* ***de doua ori diferentiabila*** *in a. Am obtinut functia liniara $d_a g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_a g\left(k\right) := g'\left(a\right) k = f''\left(a\right) hk$. Functia monomiala de gradul doi $d_a^2 f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d_a^2 f\left(h\right) := f''\left(a\right) h^2$ se numeste* ***diferentiala a doua*** *- sau* ***diferentiala de ordinul al doilea****- a functiei f in punctul a. Folosind diferentiala variabilei x (vezi observatia 3.3.3) avem*

$$d_a^2 f = f''\left(a\right) dx^2.$$

Ca in cazul diferentialei de ordinul intai, daca f este derivabila de doua ori (pe A) functia de doua variabile $d^2 f$ (deci $d_a^2 f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (a, h) \mapsto d_a^2 f\left(h\right) = f''\left(a\right) h^2$) va fi numita ***diferentiala (totala) de ordin doi*** *a functiei f, iar pentru derivata a II-a vom folosi si notatia mai sugestiva: $\frac{d^2 f}{dx^2}$.*

Inductiv se definesc diferentialele de ordin mai mare: **diferentiala de ordin** *n este - in ipoteza existentei derivatei finite de ordin n:*

- $d_a^n f = f^{(n)}(a)\, dx^n$ ***-diferentiala de ordin n in punctul*** **a**, *deci monomul* $d_a^n f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, d_a^n f(h) = f^{(n)}(a)\, h^n = \frac{d^n f}{dx^n}(a)\, h^n$;
- $d^n f = f^{(n)} dx^n$ ***-diferentiala (totala) de ordin n****, unde* $f^{(n)} := \frac{d^n f}{dx^n} := \frac{d^n}{dx^n} f$.
- *convenim ca* ***diferentiala de ordin zero*** *este chiar functia, adica* $d^0 f = f^{(0)} dx^0 = f$ *si* $d_a^0 f = f(a)$.

Exemplul 3.3.3. Fie $f(x) = 2x^2 - e^{2x}$. Diferentiala de ordin zero a functiei in origine este -1. Diferentiala functiei in origine este $d_0\ f = \left(4x - 2e^{2x}\right)_{x=0} dx = -2dx$. Diferentiala a doua a functiei in origine este $d_0^2 f = \left(4x - 2e^{2x}\right)'_{x=0} dx^2 = = \left(4 - 4e^{2x}\right)_{x=0} dx^2 = \mathbf{0}$, unde $\mathbf{0}$ este functia nula. Diferentiala a treia a functiei in origine este $d_0^2 f = \left(4 - 4e^{2x}\right)'_{x=0} dx^3 = = \left(-8e^{2x}\right)_{x=0} dx^3 = -8dx^3$, iar diferentiala a treia a functiei in origine calculata in punctul $-\frac{1}{2}$ este $d_0^2 f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Observatia 3.3.4. Reamintim ca daca $f, g : A \to \mathbb{R}$ sunt doua functii derivabile de n ori atunci derivata de ordin n a produsului fg este data de **formula lui Leibniz**:

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Folosind aceasta formula deducem imediat ca varianta ei exprimata cu operatorul de diferentiere.

Propozitia 3.3.2. Formula lui Leibniz. *Fie $f, g : A \to \mathbb{R}$ sunt doua functii derivabile de n ori. Atunci diferentiala de ordinul n a produsului celor doua functii este*

$$d^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{(n-k)} f \cdot d^{(k)} g.$$

Formula lui Taylor se poate rescrie cu ajutorul operatorului de diferentiere.

Consecinta. Formula lui Taylor. *Fie I un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila de $n+1$ ori, $a, x \in I, a \neq x$ si $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci exista un numar ξ intre a si x (adica $\xi \in (\min(a, x), \max(a, x))$) astfel incat*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d_a^{(k)} f(x - a) + \frac{1}{(n+1)!} d_\xi^{(n+1)}(x - a)$$

4. 4. Formule lui Maclaurin pentru cateva functii elementare

5. 5. Aplicatii in algebra

Exemplul 3.4.1. Fie

6. 6. Determinarea limitelor

7. 7. Determinarea extremelor

8. 8. Exercitii

(1) Folositi teorema lui Lagrange pentru a estima eroarea in aproximarea $f(x) \approx f\left(\frac{1}{100}\right)$ petru functiile definite mai jos.
  (a) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$,
  (b) $f : \left[0, \frac{1}{10}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.
  (c) $f : \left[0, \frac{1}{100}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$
  (d) $f : \left[0, \frac{1}{100}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

(2) Comentati afirmatia "eroarea care se face in aproximarea $f(x) \approx T_n(x)$ este mai mica decat $\frac{1}{10}$" daca
  (a) $f(x) = 1$, $a = 1$
  (b) $f(x) = x$, $a = 1$.

(3) Demonstrati propozitia 3.2.1.

(4) Reprezentati grafic functia f si polinoamele Maclaurin de grade $0, 1$ si 2 pentru fiecare dintre functiile de mai jos.
  (a) $f(x) = 1 + x$.
  (b) $f(x) = 1 + x^2$.
  (c) $f(x) = x + x^3$.
  (d) $f(x) = \ln(1 + x)$.
  (e) $f(x) = e^x$.
  (f) $f(x) = \sin x$.
  (g) $f(x) = \cos x$.
  (h) $f(x) = shx$ $\left(shx := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$.
  (i) $f(x) = chx$ $\left(chx := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$.

(5) Demonstrati propozitia 3.2.2.

(6) Sa se scrie urmatoarele polinoame dupa puterile lui $(x + 1)$.
  (a) $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$
  (b) $f(x) = 1 - 2x + 3x^3$
  (c) $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + x^4$
  (d) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

(7) Demonstrati Consecinta 3.2.2.

(8) Aratati ca un polinom Taylor de grad 2 pentru o functie adecvata ne da aproximarea $e^{0,1} \approx 1,10517$ cu sase zecimale exacte.

(9) Demonstrati afirmatia de la Observatia 3.3.1.

(10) Aratati ca
  (a) $\sqrt[3]{e} \approx 1,395$;
  (b) $\sin 1 \approx 0,840$;
  (c) $ch1 \approx 1,543$.

(11) Determinati diferentiala, diferentiala in $a = 1$ si diferentiala in $a = 1$ calculata in punctul 3 pentru functiile de la exercitiul 1.

(12) Fie $\mathbb{R}_n[x]$ spatiul vectorial al functiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu n, B_c baza canonica $B = \left\{1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n\right\}$ si $B' = \left\{1, x+1, (x+1)^2, \cdots, (x+1)^n\right\}$.
   (a) Fie $n = 3$. Sa se exprime urmatorii vectori in bazele B si B'.
      (i) $f(x) = 1 + 2x - x^2 - x^3$
      (ii) $f(x) = 1 - 2x + 3x^3$
   (b) Fie $n = 2$. Sa se determine matricea de trecere
      (i) de la baza canonica la baza B;
      (ii) de la baza canonica la baza B';
      (iii) de la baza B la baza canonica;
      (iv) de la baza B' la baza canonica;
      (v) de la baza B la baza B';
      (vi) de la baza B' la baza B.
   (c) Fie $n = 3$. Coordonatele vectorului f in baza B sunt $(1, 1, 1, 1)$. Folosind matricele de trecere adecvate sa se determine
      (i) coordonatele vectorului f in baza B';
      (ii) coordonatele vectorului f in baza B_c.
   (d) Fie $f \in \mathbb{R}_n[x]$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. Sa se determine
      (i) coordonatele vectorului f in baza B';
      (ii) coordonatele vectorului f in baza B_c.
   (e) Sa se determine matricea de trecere
      (i) de la baza canonica la baza B;
      (ii) de la baza canonica la baza B';
      (iii) de la baza B la baza canonica;
      (iv) de la baza B' la baza canonica;
      (v) de la baza B la baza B';
      (vi) de la baza B' la baza B.

(13) Demonstrati afirmatia de la Observatia 3.3.2.

(14) Determinati extremele urmatoarelor functii;
   (a) $f(x) = \sin x + \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   (b) $f(x) = \sin x - x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   (c) $f(x) = x + tgx$
   (d) $f(x) = \sin 3x - 3\sin x, x \in (-\pi, \pi)$
   (e) $f(x) = 2x + arctgx$
   (f) $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x, x \in (-\pi, \pi)$
   (g) $f(x) = x^{11} + 6x^6 + 2, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
   (h) $f(x) = x^2 + 2\cos x + 3$.

   Raspunsuri. a. $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; b. $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right); f_{\min} = f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; c. nu are extreme; d. $f_{\min} = f\left(\frac{\pi}{2}\right); f_{\max} = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$; e. nu are extreme; f. $f_{\min} = f\left(\frac{\pi}{2}\right); f_{\max} = f\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right); f_{\max} = f\left(-\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; g. $f_{\min} = f(0) = 2$; h. $f_{\min} = f(0) = 5$.

(15) Determinati $d^2 f$, $d_1^3 f$ si $d_0^3 f(-1)$ pentru functiile de la exercitiul 4.

(16) Demonstrati Propozitia 3.3.2.

(17) Estimati eroarea comisa la calculul expresiei $f(1)$ prin utilizarea formulei lui Taylor de ordinul 2 adecvata.

(a) $f(x) = 1 + 2x.$
(b) $f(x) = 2 + 3x^2.$
(c) $f(x) = x - 2x + x^3.$
(d) $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right).$
(e) $f(x) = e^{-x}.$
(f) $f(x) = \sin^2 x.$
(g) $f(x) = \cos x^2.$
(h) $f(x) = shx.$
(i) $f(x) = ch2x.$

(18) Sa se determine $f(1)$ cu doua zecimale exacte pentru functiile de la exercitiul 12.

(19) Determinati o margine superioara a erorii comise cand aproximam f cu T_n in a pe $[\alpha, \beta]$.
(a) $f(x) = e^{-x}, a = 0, n = 10, [\alpha, \beta] = [10, 100];$
(b) $f(x) = \sin x, a = 0, n = 10, [\alpha, \beta] = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right];$
(c) $f(x) = arctgx, a = 0, n = 3, [\alpha, \beta] = \left[-\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\right].$

(20) Determinati diferentiala de ordin $n \geq 1$ pentru functiile definite prin
(a) $f(x) = \ln|x|;$
(b) $f(x) = 2^x;$
(c) $f(x) = xe^x;$
(d) $f(x) = xe^{ax}, a \neq 1.$
Raspunsuri. a. $d^n f = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} dx^n$. b. $d^n f = 2^x \ln^n 2 dx^n$. c. $d^n f = (x+n)\, e^x dx^n$ d. $d^n f = (a^n x + \frac{1-a^n}{1-a}) e^{ax} dx^n$.

(21) Determinati cel ami mic n astfel incat $|T_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pentru orice $x \in [\alpha, \beta]$, unde T_n este polinomul Taylor de grad n asociat functiei f in punctul a
(a) $f(x) = e^{-x}, a = 0, [\alpha, \beta] = [10, 100], \epsilon = 10^{-5};$
(b) $f(x) = \sin x, a = 0, [\alpha, \beta] = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right], \epsilon = 10^{-10};$
(c) $f(x) = \sqrt{x}, a = 1, [\alpha, \beta] = \left[\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right], \epsilon = 10^{-10};$
(d) $f(x) = \ln|x|, a = -2, [\alpha, \beta] = [1, 2], \epsilon = 10^{-5}.$

(22) Demonstrati ca pentru orice $a > 0$ sirul polinoamelor Taylor asociate functiei $f(x) = \ln|x|$ in a
(a) converge pentru $x \in (0, 2a)$;
(b) diverge daca $|x - a| > a$.

(23) Fie $f \in C^2(a, b)$ si $x \in (a, b)$ astfel ca $f'(x) = 0$. Demonstrati ca
(a) daca $f''(x) > 0$ atunci exista $\epsilon > 0$ astfel incat pentru orice $z \neq x$ astfel ca $|z - x| < \epsilon$ avem $f(z) > f(x);$
(b) daca $f''(x) < 0$ atunci exista $\epsilon > 0$ astfel incat pentru orice $z \neq x$ astfel ca $|z - x| < \epsilon$ avem $f(z) < f(x).$
Generalizati proprietatile de mai sus pentru $f \in C^n(a, b)$, unde $n \geq 2$ si $x \in (a, b)$ astfel ca $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n-1)}(x) = 0.$
Indicatie. La generalizare analizati cazurile n par si n impar.

(24) Fie $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$
(a) Demonstrati ca $p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_n)) \cdots).$
(b) Estimati numarul de operatii necesare in calculul expresiei $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ si numarul de operatii necesare in calculul expresiei de la punctul a.

(25) Determinati imaginea functiei f.

(a) $f:[-2,2]\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=-3x^4+6x^2-1$

(b) $f:[-1,5]\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$

(c) $f:[0,4]\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

(d) $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\sin 2x-x$

(e) $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=24\cos x+12x^2-x^4$

(f) $f:[-1,1]\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=\arccos x+x+\frac{x^3}{3}$

Raspunsuri. a. $[-25,2]$; b. $\left[-\frac{13}{3},\frac{23}{3}\right]$; c. $\left[-1,\frac{3}{5}\right]$; d. $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; e. (-$\infty$, 24]; f. $\left[\frac{7}{6},\pi-\frac{5}{6}\right]$.

(26) Folosind formula lui Taylor dovediti ca limitele de mai jos au valoarea 1.

(a) $\lim\limits_{x\rightarrow 0}\frac{3\left[e^{-x^2}-\cos\left(\sqrt{2}x\right)\right]}{x^4}$

(b) $\lim\limits_{x\rightarrow 1}\frac{5\left[12\ln x+3x^4-16x^3+36x^2-48x+25\right]}{12(x-1)^5}$

(c) $\lim\limits_{x\rightarrow 0}\frac{2[tgx-\sin x]}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x\rightarrow 0}\frac{7!\cdot\left[shx-\sin x-\frac{x^3}{3}\right]}{2x^7}$

(e) $\lim\limits_{x\rightarrow 0}\frac{\sin x^2-x^2\cos x}{6[xshx-2chx+2]}$.

//

CHAPTER 4

4. SIRURI SI SERII DE FUNCTII

CHAPTER 5

5. SERII TAYLOR

CHAPTER 6

6. SERII FOURIER

CHAPTER 7

7. SPATII METRICE

Part 2

FUNCTII DE MAI MULTE VARIABILE REALE

The Full Title of an AMS Book or Monograph

The Author

Author Two

(A. U. Thor) Author address line 1, Author address line 2

Current address, A. U. Thor: Author current address line 1, Author current address line 2

E-mail address, A. U. Thor: author@institute.edu

URL: http://www.author.institute

Dedicated to the memory of S. Bach.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 05C38, 15A15; Secondary 05A15, 15A18

The Author thanks V. Exalted.

ABSTRACT. Replace this text with your own abstract.

Contents

CHAPTER 1

4. SIRURI SI SERII DE FUNCTII

Studiem in acest capitol si in urmatoarele doua conceptul fundamental al analizei matematice -convergenta- aplicat la o alta clasa de sirururi: sirurile de functii.

Reamintim ca o functie $f : \mathbb{N} \to X$ se numeste sir de elemente din X, si, daca notam $f(n) := f_n$ identificam sirul f cu imaginea sa: $f := (f_n)_{n\geq 0} := (f_n)_{n\in\mathbb{N}} := f_0, f_1, f_2, \cdots$ sau, daca nu exista pericol de confuzie, $(f_n) := f$, iar f_n se numeste termenul general al sirului $(f_n)_{n\geq 0}$. Aici multimea X este considerata o multime de functii avand acelasi domeniu de definitie.

1. 4.1. Convergenta sirurilor de functii

Cel mai firesc mod de abordare a convergentei unui sir de functii este cel punctual.

Definitia 4.1.1. *Fie $A \subset \mathbb{R}$ si $f_n : A \to \mathbb{R}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Multimea -posibil vida-*

$$C := \left\{ x \in A \mid \textit{sirul numeric } (f_n(x))_{n\geq 0} \textit{ este convergent} \right\}$$

se numeste ***multimea de convergenta*** *a sirului $(f_n)_{n\geq 0}$. Functia*

$$f : C \to \mathbb{R},\ f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

o numim ***limita sirului*** *(f_n); in acest caz vom scrie*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \text{ sau } f_n \to f$$

si vom spune ca sirul (f_n) ***converge punctual*** *la functia f (pe multimea C), sau ca f_n* ***tinde*** *la f* ***punctual*** *(pe multimea C).*

Observatia 4.1.1. Reamintim ca $f_n \to f$ pe multimea C daca si numai daca

$$\forall x \in C, \forall \epsilon > 0 \exists n(x,\epsilon) \in \mathbb{N} : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \ \forall n \geq n(x,\epsilon)$$

Subliniem faptul ca, in aceasta definitie, rangul $n(x,\epsilon)$ *depinde nu numai de ϵ ci si de x.*

De asemenea reamintim ca natura unui sir nu este afectata de modificarea unui numar finit de termeni ai sirului.

Exemplul 4.1.1. Fie $f_n(x) := x^{\frac{1}{n}}, f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 0 \text{ daca } x \neq 1 \\ 1 \text{ daca } x = 1 \end{cases}$$

rezulta ca multimea de convergenta (punctuala) este intregul domeniu $(0,\infty)$, iar $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ daca } x \neq 1 \\ 1 \text{ daca } x = 1 \end{cases}$ este limita sirului (f_n).

Exemplul 4.1.2. Fie $f_n(x) := x^n, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 \text{ daca } x \in (-1,1) \\ 1 \text{ daca } x = 1 \\ \infty \text{ daca } x > 1 \\ \text{nu exista daca } x \leq -1 \end{cases}$$

rezulta ca multimea de convergenta a sirului (f_n)este intervalul $(-1,1]$ si ca $f_n \to f$ punctual pe $(-1,1]$, unde $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ daca } x \in (-1,1) \\ 1 \text{ daca } x = 1 \end{cases}$.

Observatia 4.1.2. Sa remarcam ca, la primul exemplu, functiile f_n sunt continue, i.e. $f_n \in C^0(0,\infty)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dar limita punctuala a sirului (f_n) este o functie discontinua, i.e. $f \notin C^0(0,\infty)$. La exemplul 4.1.2 avem $f_n \in C^0(\mathbb{R})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ si $f \notin C^0(-1,1]$ chiar daca functiile f_n sunt continue pe intervalul $(-1,1]$.

Convergenta punctuala inseamna ca sirul de functii converge in fiecare punct (al multimii de convergenta), dar "viteza" de convergenta poate sa varieze in functie de punct (vezi si Observatia 4.1.1). Un concept care asigura o "viteza" de convergenta uniforma este convergenta uniforma.

Vom introduce un nou concept de convergentă pentru şiruri de funcţii, care "repară" acest defect al convergenţei punctuale.

Defiiţie: Fie $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Spunem că şirul (f_n) este uniform convergent pe submulţimea B a lui A dacă există o funcţie $f : B \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ pentru care

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in B, \quad \forall n \geq n(\varepsilon).$$

În acest caz scriem :

$$f_n \to f \ \ \textit{uniform pe multimea } B \textit{ sau } f_n \to f \textit{ uniform}$$

Remarcă: Prin compararea definiţiilor de mai sus rezultă că dacă $f_n \to f$ uniform pe mulţimea B, atunci f_n converge punctual la f pe B.

Exemplu: Fie $f_n(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Cum am văzut, f_n converge punctual la funcţia f, dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \in (-1,1) \\ 1, & \text{dacă} \quad x = 1. \end{cases}$$

Arătam că f_n nu converge uniform la f pe (-1, 1], adică şirul (f_n) este convergent (punctual) pe (-1,1], dar convergenţa nu este uniformă.

Fie $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}, \quad \text{pentru } n \to \infty.$$

În fapt:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2.$$

Din definiţii, după cum am văzut în exemplele de mai sus, avem următoarele teste pentru a avea convergenţă uniformă, (pe scurt CU) şi respectiv, pentru a nu avea convergenţă uniformă (pe scurt NCU).

Test practic pentru CU: *Dacă există un şir* (a_n) *cu* $a_n \to 0$ *pentru* $(n \to \infty)$ *şi* $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ *pentru orice* $x \in B$ *şi orice* $n \geq n_0$, *unde* $n_0 \in \mathbb{N}$ *este fixat, atunci* (f_n) *converge uniform la* f *pe mulţimea* B.

Demonstraţie: Fie $\varepsilon > 0$. Întrucât $a_n \to 0$ rezultă că există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n < \varepsilon$, pentru orice $\geq n(\varepsilon)$. În consecinţă :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n(\varepsilon), \quad \forall x \in B,$$

adică $f_n \to f$ uniform pe B.

Test practic pentru NCU: *Presupunem că* $f_n \to f$ *punctual pe* B. *Dacă există un şir* (x_n), *cu* $x_n \in B$, *astfel încât oricare dintre următoarele două afirmaţii*

- ***(a)*** *Şirul numeric* $(f_n(x_n) - f(x_n))$ *nu tinde la 0, când* $n \to \infty$, *sau*
- ***(b)*** *există* $\varepsilon_0 > 0$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}$ *încât* $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$, *pentru orice* $n \geq n_0$,

este adevărată, atunci şirul (f_n) *nu converge uniform pe mulţimea* B.

Demonstraţie: Este clar că (**b**) $\Rightarrow$ (**a**). Este deci suficient să arătăm că din **(a)** rezultă că şirul (f_n) nu converge uniform pe mulţimea B. Procedăm prin absurd. Admitem că şirul (f_n) converge uniform pe mulţimea B la funcţia f. Fie $\varepsilon > 0$, fixat şi $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n(\varepsilon), \forall x \in B. \tag{1}$$

În particular, relaţia (1) rămâne adevărată şi când înlocuim x cu x_n, adică

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n(\varepsilon).$$

Prin urmare şirul numeric $(f_n(x_n) - f(x_n))$ converge la 0. Am ajuns la contradicţie în raport cu ipoteza.

Acum vom extinde cunoscutul criteriu de convergenţă al lui Cauchy de la şiruri numerice la şiruri de funcţii.

Criteriul lui Cauchy pentru convergenţă uniformă: *Şirul* (f_n) *converge uniform pe mulţimea* B *dacă şi numai dacă el este şir Cauchy, adică, pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1, \forall x \in B.$$

Demonstraţie: **Necesitatea.** Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece şirul de funcţii (f_n) converge uniform pe mulţimea B la o funcţie pe care o notăm cu f, avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } n \geq n(\varepsilon) \text{ şi orice } x \in B.$$

Atunci, pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$ şi orice $x \in B$, avem că:

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < 2 \cdot \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Suficienţa: Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece (f_n) este şir uniform Cauchy, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } n \geq n(\varepsilon), \text{ orice } p \geq 1 \text{ şi orice } x \in B. \quad (1)$$

În particular, de aici rezultă că şirul numeric $(f_n(x))$, cu $x \in B$, este convergent, deci există o funcţie $f : B \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in B.$$

Din (1), pentru $p \to \infty$, obţinem:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n(\varepsilon) \text{ şi orice } x \in B.$$

Prin urmare, şirul (f_n) converge uniform la f pe mulţimea B.

Teorema 1 (de continuitate) *Fie (f_n) un şir de funcţii continue. În ipoteza că şirul converge punctual către o funcţie f, pe un interval B, ştim că aceasta poate să nu fie continuă pe B. Dacă convergenţa este uniformă pe B atunci limita şirului este o funcţie continuă pe B.*

Ştim deja că şirul de funcţii (g_n) cu $g_n(x) := x^n$, converge punctual pe $(-1, 1]$ la o funcţie discontinuă pe acest interval. Analizăm acum situaţia când $f_n \to f$ uniform pe un interval B. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ pentru orice } n \geq n(\varepsilon) \text{ şi orice } x \in B. \quad (2)$$

Fie $x_0 \in B$, fixat şi $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n(\varepsilon)$, arbitrar, dar fixat. Din ipoteză, f_N este continuă în x_0, deci există $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, astfel încât

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pentru orice } x \in B \text{ cu } |x - x_0| < \delta. \quad (3)$$

Utilizând (2),(3) pentru $x \in B$ cu $|x - x_0| < \delta$ şi inegalitatea triunghiului, obţinem:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

care arată că funcţia f este continuă în x_0. Cum x_0 a fost ales aleatoriu în B, funcţia f este continuă pe B şi demonstraţia teoremei se încheie.

Definiţia 3. Fie f o functie derivabilă pe intervalul $I \blacksquare \mathbb{R}$ si presupunem că $f \blacksquare C^0(I)$ (adică derivata f ' este o functie continuă in I). Atunci spunem că f este o functie de clasa C^1 în I si sciem: $f \blacksquare C^1\ (I)$. Prin induc■ie:

$f \blacksquare C^{n+1}(I)$ dacă si numai dacă $f \blacksquare C^n(I)$ si $f^{\ (n)} \blacksquare C^1(I)$ (adică functia f este de clasă $C^{n+1} \blacksquare f \blacksquare C^n(I)$ si $f^{(n)} \blacksquare C^1(I)$)

În urmatoarele rânduri vom da doua criterii care oferă suficiente condi■ii în care operatorii **lim si** $\frac{d}{dx}$ comută, si anume

$(\lim f_n)$' $= \lim f_n$, sau $\frac{d}{dx}(\lim f_n) = \lim \frac{df_n}{dx}$.

Teorema 2 (de derivabilitate). Fie (f_n) un sir de clase $C^1[a,b]$ (adică $f_n \in C^1[a,b]$ pentru orice n). Presupunem că:

(i) $\exists\ c \in [a,b]$ astfel încat $(f_n(c))$ este convergent

(ii) $\exists\ g :[a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încat $f_n{}' \xrightarrow[{[a,b]}]{u} g$

Atunci:

(a) $\exists f\ :[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă astfel încat $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$

(b) f ' $= g$

Demonstratie. Deoarece $f'_n \xrightarrow{u} g$ si f ' $\in C^0[a,b]$ rezultă că $g \in C^0[a,b]$ (vezi Teorema 1) si din teorema primitivei :

$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f$ '(t) dt

Fie $f\ (x) = \lim\ f_n(c) + \int_c^x g(t)$dt

Atunci f ' $= g$ si:

$|f_n(x) - f(x)| \blacksquare |f_n(c) - \lim\ f_n(x)| + |x - c| \sup\limits_{[a,b]}|f'_n(x) - g(x)|$,

Prin urmare:

$\underset{[a,b]}{sup}|f_n(x) - f(x)| \blacksquare |f_n(c) - \lim f_n(c)| + (b - a) \underset{[a,b]}{sup}|f'_n(x) - g(x)|$

Consecin■ă: $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$ si f ' $=g$, (adică $(\lim f_n)$' $= \lim f'_n$).

Teorema 3 (a derivatei). Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un sir de functii diferite în intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ astfel încat :

(i) $f_n \xrightarrow{u} f$ în I

(ii) $f'_n \xrightarrow{u} f$ în I

Atunci f este o functie derivabilă si $f' = g$

Demonstratie. Fie $a \in I$ si $\blacksquare > 0$. Din (ii) rezultă că:

$\exists n(\blacksquare) \in \mathbb{N}$**:**$|f'_n(x) - g(x)| < \frac{\blacksquare}{3}, \forall n \blacksquare n(\blacksquare)\ ,\forall n \in I.$

Din criteriul lui Cauchy rezultă că:

$\exists m(\blacksquare) \in \mathbb{N}$**:**$|f'_m(x) - f'_n(x)| < \blacksquare, \forall m,n \blacksquare m(\blacksquare), \forall x \in I$

Folosind teorela lui Lagrange pentru f_m - f_n si $x \in I\backslash\{a\}$ ajungem la concluzia ca există un ■ între a si b astfel încat:

$|\frac{f_m(x)\ -\ f_m(a)}{x-a} - \frac{f_n(x)\ -\ f_n(a)}{x-a}| = |\frac{(f_m(x)\ -\ f_n(x))\ -\ (f_m(a)\ -\ f_n(a))}{x-a}| = |f'_m(\blacksquare) - f'_n(\blacksquare)| < \frac{\blacksquare}{3}$.

Dacă $m,n \blacksquare m(\blacksquare)$; $m \longrightarrow \infty$ în această inecua■ie ob■inem:

$|\frac{f(x)\ -\ f(a)}{x-a} - \frac{f_n(x)\ -\ f_n(a)}{x-a}| \blacksquare \frac{\blacksquare}{3}, \forall n \blacksquare m(\blacksquare), \forall x \in I,\ x \neq a$

Acum, fie n ■ $\max(n(\blacksquare), m(\blacksquare))$; deoarece f_n este o functie derivabilă în a există un vecin V al punctului a astfel încat dacă $x \in V \cap I\ \backslash\{a\}$:

$|\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} - f_n'(a)|$ ■ $\frac{■}{3}$ care implică:

$|\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} - g(a)|$ ■ $|\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a}| + |\frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} - f_n'(a)| + |f_n'(a) - g(a)| < \frac{■}{3} + \frac{■}{3} + \frac{■}{3} =$ ■, pentru to■i $x \in V \cap I \setminus \{a\}$, prin urmare f este o functie derivabilă în a si $f'(a) = g(a)$ (adică $(\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f_n)' = \lim f_n'$).

SERII DE FUNCŢII

Definitia 4. Fie $(f_n)_{n\geq 1}$ un sir de functii, $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Şirul (de functii) $(s_n)_{n\geq 1}$, unde $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, pentru to■i $x \in A, n \in \mathbb{N}^*$ este numit o serie de functii cu termenul general f_n; notăm aceasta serie $(s_n)_{n\geq 1}$ prin:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in A$; (*)

Func■ia $s_n : A \to \mathbb{R}$ este numită suma par■ială de ordin n pentru seria (*).

Şirul:

$\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} f_m$ se nume■te restul de ordinul n (pentru seria (*))

(ii) Spunem ca setul (*) este punctual (sau punctual) convergent în $x \in A$ dacă si numai dacă seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă (adică $(s_n(s))$ este un sir convergent). Setul:

$C = \{x \in A / \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este convergent$\}$ este numit setul convergent al seriei (*), si cartografia:

$s : C \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in C$ este numită suma seriei (*); si scriem $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ (sau C).

(iii) Spunem că (*) este uniform convergentă (pe scurt UC) pe $B \subseteq C$ dacă sirul de sumă par■ială (s_n) este uniform convergent (pe C).

Observatie 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este o serie convergentă în C dacă si numai dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încat restul de ordin n este convergent pe C ; în acest caz avem:

$s(x) = s_n(x) + R_n(x)$, sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s_n(x) + \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} f_m(x), x \in C$, unde $R_n(x) = \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} f_m(x)$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ convergent pe C dacă si numai dacă:

$\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} f_m(x) \to 0$, când $n \to \infty$, pentru to■i $x \in C$.

3. Dacă (*) este UC pe B atunci (*) este convergent (punctual).

4. Daca (*) este convergent absolut pe B (adică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ este convergent pentru to■i $x \in B$) atunci (*) est

Criteriul convergen■ei (uniforma convergent) pentru sirul de functii poate fi rescris pentru serii de functii.

Criteriul lui Cauchy's pentru UC. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergent pe B dacă si numai dacă:

$[\forall\blacksquare > 0, \exists n(\blacksquare) \in \mathbb{N}$ astfel încat$|\ f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \blacksquare, \forall n \geq n(\blacksquare), \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in B]$

Teorema 4. (de continuitate) Presupunem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergent pe B si $f_n \in C^0(B)$, pentru to ∞ $\mathbb{N}^*$.Atunci suma este o functie continuă pe B (adică suma esta o functie de clasă $C^0(B)$); În plus, dacă $B = [a, b]$ atunci operatorii $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ si $\int\limits_a^b$ comută, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\int_a^b f_n(x)dx) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\ (x) \right) dx.$$

Teorema 5.(de derivabilitate). Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ sunt serii uniform convergent pe B ,atunci suma primei serii este derivabilă pe B si operatorii $\frac{d}{dx}$ (sau operatorul) si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ comută, adică $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$

Vom folosi urmatorul criteriu pentru convergenta uniformă.

Testul practic pentru UC (Weierstrass). Presupunem că: $|f_n(x)| \blacksquare a_n, \forall x \in B, \forall n \in \mathbb{N}^*$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ - convergent; atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniformă si convergentă absolut pe B.

Demonstratie. Afirmaţia rezultă din inegalitatea:

$|\mathrm{f}_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + ... + |f_{n+p}(x)| \blacksquare a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}, \forall n, p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in B$, si criteriul de convergenţă al lui Cauchy (pentru serii de functii si pentru serii numerice).

Exemplu 3. Să aratăm că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n}\ \sin nx, x \in \mathbb{R}$ este convergent uniform si absolut (pe $\mathbb{R}$) si suma este o functie continuă si derivabilă.Observam că:

$|e^{-n}\ \sin nx| \blacksquare e^{-n}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n}$ convergent;

prin urmare, cu criteriul lui Weierstrass, seria noastră de functii(cu $f_n(x) = e^{-n} \sin nx$) este convergent absolut si uniform.În plus $f_n \in C^0(\mathbb{R})$,prin urmare, din teorema de continuitate , $s \in C^0(\mathbb{R})$, unde $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n} \sin nx, x \in \mathbb{R}$ este suma serilor date. În plus:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} ne^{-n} \cos nx$, si $|f'(x)| \blacksquare ne^{-n} := a_n$, pentru to■i $x \in \mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$; dar seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent (pentru exemplu, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1} < 1$, si prin criteriul raportului rezultă convergenta $\sum a_n$). Prin urmare, prin testul

lui Weierstrass, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$ este uniform convergent pe $\mathbb{R}$**;** prin teoria derivabilitati rezultă că s este o functie derivabilă si $s' = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'$.

Exemplu 4. Pentru seria

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ al n-lea termen satisface inecuatia $\frac{|\sin nx|}{n^2}$ ■ $\frac{1}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ si seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergent. Prin urmare, conform testului lui Weierstrass seria noastră este convergentă unifor pe întreaga axa. În plus, deoarece termenii seriei sunt functii continue prin teorema de continuitate, suma serilor este o functie continuă.

Exercitiul 5. Găsiti setul de serii convergente:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^n}, a, x \in \mathbb{R}$

Solutie. Folosim criteriul radicalului:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\sin x|}{(\sqrt[n]{n})^a} = |\sin x|$ unde $f_n(x) = \frac{\sin^n x}{n^a}$. Prin urmare, dacă $|\sin x| < 1$ atunci $x \in C$ (set de convergen■ă), adică

$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \subseteq C.$

Dacă $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ob■inem seria:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n(\frac{\pi}{2}+k\pi)}{n^a} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{nk}}{n^a}, k \in \mathbb{Z}$**;**

Prin urmare:

- pentru k - par, $k \in \mathbb{Z}$ avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ care este convergentă pentru a > 0 si divergen■ă pentru a ■ 1;
- pentru un k - impar avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{nk}}{n^a}$, dacă $a > 0$ seria este convergentă (criteriul lui Leibniz) si pentru a ■ 0 divergent (criteriul divergen■ei).

Prin urmare setul convergen■ei este:

$$C = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \text{ , dacă } a > 1 \\ \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ , dacă } a \in \text{ (0,1]} \\ \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ , dacă } a \leq 0 \end{array} \right\}$$

Vom demonstra mai multe teste subtile de convergenţă uniformă bazat pe a■a-numita identitatea lui Abel (care este un analog al formulei de integrare prin părti si a fost folosit în demonstratia criteriului lui Abel pentru seria numerică).

Identitatea lui Abel.Să considerăm seria (*) de forma

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n$ unde α_n, a_n sunt functii definite pe $A \subseteq \mathbb{R}$ sau numere constante

$B_k = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k}$ scriem suma redusă a (*) pentru Identitatea lui Abel:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} a_{n+k} = \alpha_{n+1} a_{n+1} + \alpha_{n+2} a_{n+2} + ... + \alpha_{n+p} a_{n+p} =$$
$$= \alpha_{n+1} B_1 + \alpha_{n+2}(B_2 - B_1) + ... + \alpha_{n+p}(B_p - B_{p-1}) =$$
$$= (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})B_1 + (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})B_2 + ... + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})B_{p-1} + \alpha_{n+p} B_p =$$
$$= \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k-1})B_k + \alpha_{n+p} B_p. \qquad (**)$$

Teorema 6.(Testul lui Dirichlet pentru UC) Presupunem că există un $M > 0$ astfel încat $|s_n(x)| \leq M$,$\forall n \in \mathbb{N}$**,**$\forall n \in B$, unde $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x)$ si sirul de functii reale $\alpha_n : B \to \mathbb{R}$**,**$n \in \mathbb{N}$ este convergent uniform la 0(când n creste) pe B si descreste pentru orice $x \in B$ fixat.Atunci seria (*):

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) a_n(x)$ este uniform convergent pe B

Demonstratie. Avem:

$|B_k(x)| = |s_{n+k}(x) - s_n(x)| \leq |s_{n+k}(x)| + |s_n(x)| \leq 2M, \forall x \in B,$

si în virtutea identită■ii lui Abel (**) si faptul că α_n este

descrescătoare si tinde uniform la zero, avem:$\forall \blacksquare > 0, \exists n(\blacksquare) \in \mathbb{N}$ astfel încat inecuatia:

$|\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}(x) a_{n+k}(x)| = 2M \sum\limits_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k}(x) - a_{n+k+1}(x)) + 2\alpha_{n+p}(x) M = 2M\alpha_{n+1}(x)$
$< \blacksquare$,este îndeplinită pentru orice $n \geq n(\blacksquare), p \in \mathbb{N}^*$ si pentru orice $x \in B$. În consecin■ă, serie este, conform criteriul lui Cauchy de convergen■ă, uniform convergentă.

Ca urmare, avem următorul criteriu practic pentru UC.

Criteriul lui Leibniz. Dacă $\alpha_n \xrightarrow[B]{n} 0$ si $(\alpha_n(x))_{n \geq 1}$ este un sir de functii descrescător atunci seria:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n(x)$ este uniform confergent pe B.

Teorema 7.(Testul lui Abel pentru UC). Dacă functia reala α_n este o clasa monotonă de siruri descrescatoare (cu n crescător) pentru to■i $x \in B$ si sunt uniform mărginită pe B, iar în cazul în care serii de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este uniform convergent pe B atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \beta_n(x)$. este de asemenea uniform convergent pe B.

Demonstratie. Conform ipotezei există o constantă $M > 0$

astfel încat:

$|\alpha_n(x)| \leq M, \forall x \in B, \forall n \in \mathbb{N}$

Prin convergen■a uniformă a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ pe B, pentru oricare $\blacksquare > 0$ există un $n(\blacksquare) \in \mathbb{N}$ astfel încat $|B_k(x)| < \blacksquare, \forall n \geq n(\blacksquare), \forall k \in \mathbb{N}$

Prin urmare, din Identitatea lui Abel, si din monotonia lui (α_n) ,

pentru $n \geq n(\blacksquare)$, si pentru to■i $p \in \mathbb{N}^*$ avem:

$|\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}(x) a_{n+k}(x)| \leq \blacksquare \sum\limits_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k}(x) - \alpha_{n+k-1}(x)) + \blacksquare |\alpha_{n+p}(x)| = \blacksquare(\alpha_{n+1}(x) - \alpha_{n+p}(x)) + \blacksquare |\alpha_{n+p}(x)| \leq 3M\blacksquare$

pentru toti $x \in B, p \in \mathbb{N}$**,** si toti $n \geq n(\blacksquare)$; în consecin■ă, din criteriu lui Cauchy

rezultă că seria este convergent uniforma.

Exemplul 6. Seriile

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \alpha > 0$

sunt convergente uniform si absolut pentru $\blacksquare > 1$ pe $\mathbb{R}$, deoarece

valoarea absolută a termenului lor general, nu depă■este termenul general al seriei armonice $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$,si prin testul lui Weierstrass ,iar seria data este UC pe $\mathbb{R}$ pentru $\alpha > 1$.Testul lui Weierstrass nu mai este aplicabil cand $\alpha \leq 1$ deoarece in acest caz seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergenta.

Fie $\delta \in (o, \pi)$; atunci ambele serii sunt convergente pe $[\delta, 2\pi - \delta]$ pentru $\alpha \in 0, 1]$; intr-adevar suma partiala a seriilor este egala cu:

$s_n(x) = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, $\sigma_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, n \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare, aceste functii sunt delimitate uniform pe $[\delta, 2\pi - \delta]$:

$|s_n(x)|$. $\quad |\sigma_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

pe langa:

$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \to 0$,unde $n \to \infty$, si, prin urmare, din testul lui Dirichlet, seria noastră este convergenta uniform pe $[\delta, 2\pi - \delta]$.

Exemplul 7. Fie

$s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}, s : [0, 1] \to \mathbb{R}$, unde prin s ne referim la suma punctuala (i.e $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s, s_n$ fiind a n-a suma partiala). Fie $f_n(x) = \frac{x}{n(x+n)}$; atunci$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergenta, prin urmare convergenta seriei este uniforma (Testul lui Weierstrass), si deci continuitatea uniforma, $f_n \in C^0[0, 1], n \in \mathbb{N}^*$, implica continuitatea lui s, i.e $s \in C^0[0, 1]$, care la randul sau asigura $\int_0^1 s(x)dx$ exista. Numiti numarul γ.Atunci:

$\gamma = \int_0^1 s(x)dx = \int_0^1 (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)})dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{xdx}{n(x+n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n})dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n) = \lim\limits_{m\to\infty} [\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{k} - \ln(1+m)]$

Acest numar este numit constanta lui Euler (vezi exercitiul 1,Cap. 1.8); pentru $m = 10^{10}$, după estimarea de rutină, obtinem: $\gamma = 0.5772157..$; Prin urmare, putem aproxima:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \approx \ln(m+1) + 0.5772157.$$

Exemplul 8.Consideram $s : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ să fie suma punctual de serii:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ bineinteles ca $s(0) = 0$ si pentru oricare $\blacksquare > 0$, daca $x \geq \blacksquare$:

$\frac{x}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{\frac{1}{x}+n^2\blacksquare} < \frac{1}{n^2\blacksquare}$, prin urmare, prin testul lui Weierstrass , seria este convergenta uniform pe $[\blacksquare, \infty)$, pentru toti $\blacksquare > 0$. Prin urmare, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ si $0 < \blacksquare \leq x$:

$$\frac{x}{1+(n+1)^2x^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{x}{1+t^2x^2}dt \leq \frac{x}{1+n^nx^2},$$

de unde:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+(n+1)^2x^2} \leq \int_0^{\infty} \frac{x}{1+t^2x^2}dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^nx^2},$$

de unde:

$s(x) \leq \arctan tx|_0^\infty \leq x + s(x)$, sau $s(x) \leq \frac{\pi}{2} \leq x + s(x)$.

Acum, fie $x \to 0$ (cu valori pozitive);prin urmare $\lim\limits_{x \to 0} s(x) = \frac{\pi}{2}$. Dar $s(0) = 0$, i.e. $s \notin C^0[0, \infty)$; astfel, putem concluziona că convergen■a de serie nu este uniformă pe $[0,$ ■) (dacă ar fi, s ar fi continua deoarece fiecare termen al seriei este continuu).

Exemplul 9. Fie s suma punctuala de serii
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}, x \in \mathbb{R}$**;**
Criteriul lui Weierstrass spune ca : $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este suma uniforma a seriei, prin urmare $s \in C^0(\mathbb{R})$.Daca derivam seria termen cu termen ,obtinem seria :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2 x).$$

Fie $x = r\pi$, unde r este un numar rational;atunci o infinitate de termeni ai seriei au valoarea absoluta egala cu 1,deci aceasta serie nu poate converge la nici un interval.Daca s' exista,atunci aceasta nu este suma punctuala a seriei(1).

2. 4.?. Exercitii

(1) Studiati convergenta sirului de functii $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (a) $f_n(x) = \sin nx$.
 (b) $f_n(x) = \sin \frac{nx}{\sqrt{n^2+1}}$.
 (c) $f_n(x) = n \sin \frac{nx}{n^2+1}$.
 (d) $f_n(x) = narc\sin \frac{n}{xn^2+1}$
(2) Aratati ca orice sir de functii uniform convergent este convergent (punctual).
(3) Aratati ca sirul de functii (f_n) converge punctual dar neuniform pe A, unde:
 (a) $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.
 (b) $f_n(x) = nxe^{nx}, A = (-\infty, 0]$.
(4) Sa se arate ca $f_n(x) := \frac{nx}{1+(n+1)x}$ $x \geq 0$ defineste un sir de functii convergent care nu este uniform convergent.
(5) Sa se studieze convergenta punctuala si uniforma a sirului de functii (f_n).
 (a) $f_n(x) = \cos^n x$.
 (b) $f_n(x) = \sin nx \cdot \cos^n x$.
 (c) $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x$.
(6) Demonstrati ca (f_n) este uniform convergent pe multimea A, unde:
 (a) $f_n(x) = x^n, A = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.
 (b) $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, A = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.
 (c) $f_n(x) = nxe^{nx}, A = (-\infty, \alpha]$ unde $\alpha < 0$.
 (d) $f_n(x) = \frac{1-x^a}{1+x^a}, A = [-a, a]$, $a > 1$.
(7) Fie $f_n(x) = e^{-nx}, x \geq 0$.
 (a) Sa se arate ca (f_n) este un sir convergent pe $[0, \infty)$.
 (b) Sa se arate ca (f_n) nu este uniform convergent pe $[0, \infty)$.
 (c) Sa se arate ca (f_n) este uniform convergent pe $[a, \infty)$ pentru orice $a > 0$.
(8) Fie $f_n, g_n, f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca $f_n \xrightarrow{u} f$ si $g_n \xrightarrow{u} g$. Sa se arate ca
 (a) $f_n + g_n \xrightarrow{u} f + g$.

(b) Daca functiile f si g sunt marginite atunci $f_n g_n \xrightarrow{u} fg$.
(c) Daca functia f este nemarginita atunci este posibil ca $f_n g_n \nrightarrow fg$.

(9) Fie $r > 0$ si $f_n, g_n : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel ca $f_{n+1}(x) = f_n(x) + r$ si $g_n(x) := \log_{f_n(x)} f_{n+1}(x)\ \forall\ n \in \mathbb{N}, \forall x > 1$.
(a) Sa se studieze convergenta sirului de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(b) Sa se studieze convergenta sirului de functii $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} g_n$.

(10) Aratati ca pentru orice $\epsilon \in (0,1)$ sirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = x^n$ converge uniform pe $(0, 1-\epsilon)$ dar nu converge uniform pe $(0,1)$.

(11) Dati un exemplu de sir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de functii marginite pe un interval I care converge punctual la o functie $f : I \to \mathbb{R}$ nemarginita.

(12) Este adevarata afirmatia "exista un sir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de functii marginite pe un interval I care converge uniform la o functie $f : I \to \mathbb{R}$ nemarginita"?

(13) Un sir de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit pe o multime A se numeste **sir Cauchy punctual** pe multime A daca pentru orice $x \in A$ sirul $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este sir fundamental. Demonstrati ca orice sir de functii Cauchy punctual este convergent punctual.

(14) Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii definit pe o multime A si $f : A \to \mathbb{R}$. Dovediti implicatiile:
(a) $f_n \to f \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \to 0\ \forall x \in A$.
(b) $|f_n(x) - f(x)| \to 0\ \forall x \in A \Rightarrow f_n \to f$

(15) Fie $f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } 0 \le x \le 1 - \frac{1}{n}, \\ n\left[x - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \text{ pentru } 1 - \frac{1}{n} \le x \le 1, \\ 1 \text{ pentru } 1 \le x \le 2 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Aratati ca sirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent punctual pe $[0,2]$.
(b) Aratati ca sirul (f_n) nu este uniform convergent pe $[0,2]$.

(16) Folosind Criteriul lui Cauchy demonstrati ca sirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este uniform convergent pe A.
(a) $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos^k kx}{k^a}, A = \mathbb{R}, a > 1$.
(b) $f_n(x) = \frac{nx}{n^\alpha + 1}, A = [0,a], a > 0, \alpha > 2014$.
(c) $f_n(x) = \sin^n x + \cos^n x, A = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

(17) Aratati ca $f_n \underset{[a,\infty)}{\overset{U}{\nrightarrow}} 0$, unde $f_n(x) = \frac{nx}{n^\alpha + 1}$, $a > 0, \alpha > 2014$.

(18) Fie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{nx}{n^2x^2+1}$. Aratati ca sirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este uniform convergent pe $[0,1]$ si totusi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

(19) Determinati multimea de convergenta C si limita punctuala a sirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
(a) $f_n(x) = x^{4n} + x^{3n} + x^{2n} + x^n + 1$.
(b) $f_n(x) = \sin(f_{n-1}(x))$ $n \ge 2$ si $f_1(x) = x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
(c) $f_n(x) = 1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x + \cdots + \frac{1}{n}\cos^n x, x \in \mathbb{R}$.

(20) Demonstrati ca seria de functii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge punctual si neuniform pe multimea A, unde:
(a) $f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{nx^n}, A = (1, \infty)$.

(b) $f_n(x) = \frac{x^n}{(1+x^2)^n}$, $A = \mathbb{R}$.
(c) $f_n(x) = 3^n \sin \frac{1}{4^n x}$, $A = \mathbb{R}^*$.

(21) Aratati ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolut si uniform pe multimea $\mathbb{R}$, unde:
(a) $f_n(x) = \frac{\sin^4 nx}{n^3}$.
(b) $f_n(x) = \frac{x^2}{1+n^4x^4}$.
(c) $f_n(x) = arctg \frac{2x}{n^4+x^2}$.

(22) Determinati multimea de convergenta pentru urmatoarele serii.
(a) $1+\frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x^2}{3\cdot 3^2} + \frac{x^3}{4\cdot 3^3} + \cdots$
(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$
(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$
(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$

(23) Determinati suma seriei
(a) $1 + 2x + 3x^2 + ...$
(b) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...$
(c) $1 - 3x^2 + 5x^4 + ...$
(d) $1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + ...$

The Full Title of an AMS Book or Monograph

The Author

Author Two

(A. U. Thor) Author address line 1, Author address line 2

Current address, A. U. Thor: Author current address line 1, Author current address line 2

E-mail address, A. U. Thor: author@institute.edu

URL: http://www.author.institute

Dedicated to the memory of S. Bach.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 05C38, 15A15; Secondary 05A15, 15A18

The Author thanks V. Exalted.

ABSTRACT. Replace this text with your own abstract.

Contents

CHAPTER 1

5. SERII DE PUTERI

Seriile de puteri si generalizarea lor -seriile Taylor - constituie clasele de serii de functii cel mai des folosite in inginerie datorita maleabilitatii lor din punct de vedere computational. Asa cum seriile numerice modeleaza riguros sintagma *sume infinite*, seriile de puteri modeleaza matematic expresia *functii polinomiale cu numar infinit de termeni.* Printre aplicatiile cele mai importante ale acestor serii amintim definirea de numere transcendente posibilitatea de estimare a acestora cu precizie oricat de mare si aproximarile unor functii transcendente cu ajutorul polinoamelor..

1. 5.1. Raza de convergenta. Domeniul de convergenta

Seriile de puteri sunt serii de functii al caror termen general de rang n este un monom de grad n.

Definitia 5.1.1. Serie de puteri. Raza de convergenta. *O serie de functii de forma*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (*)$$

unde $a_0, a_1, a_2, ...$ *sunt numere reale arbitrare date se numeste* ***serie de puteri.*** Fie C multimea de convergenta a seriei $(*)$. *Atunci*

$$R := \sup\{|x| \mid x \in C\} \subset [0, \infty]$$

se numeste ***raza de convergenta*** *a seriei* $(*)$.

Observatii 5.1.1. Fie seria de puteri $(*)$.

(1) Reamintim ca multimea de convergenta (sau domeniul de convergenta) a seriei $(*)$, adica

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \text{seria numerica } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ este convergenta} \right\},$$

este domeniul de definitie al sumei seriei de puteri, si ,ca de obicei, identificam suma seriei cu simbolul seriei pe multimea de convergenta. Deci functia

$$S : C \to \mathbb{R} \text{ definita prin } S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

este suma (punctuala a) seriei de puteri $(*)$.

(2) Multimea de convergenta a unei serii de puteri nu poate fi vida deoarece

$$0 \in C.$$

(3) Raza de convergenta este nula daca si numai daca multimea de convergenta contine doar pe $x = 0$, deci
$$R = 0 \Leftrightarrow C = \{0\}.$$
(4) Convenim ca termenul de grad 0 din $(*)$ este a_0 (chiar daca $x = 0$).
(5) Ca la orice serie daca schimbam un numar finit de termeni natura seriei nu se schimba, deci nici multimea de convergenta, nici raza de convergenta; in schimb suma seriei se modifica, in general.

Exemplul 5.1.1. Cel mai simplu exemplu de serie de puteri este seria geometrica
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n$$
unde n_0 este un numar natural. Suma sa este functia $S : (-1, 1) \to \mathbb{R}, S(x) = \frac{x^{n_0}}{1-x}$. Deci raza de convergenta a seriei geometrice este $R = \sup[0, 1) = 1$.

Exemplul 5.1.2. Sa determinam raza de convergenta a seriei de puteri
$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots .$$
Sa observam ca termenul general al seriei noastre este $u_n := \frac{1}{n!}x^n$ si ca $x = 0 \in C$, unde C este domeniul de convergenta. Deoarece
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$
rezulta -din criteriul raportului- ca seria este convergenta pentru orice $x \neq 0$. Prin urmare $C = \mathbb{R}$ si raza de convergenta este $R = \sup[0, \infty) = \infty$.

Prppozitia 5.1.1. Formule de calcul pentru raza de convergenta. *Fie seria de puteri $(*)$ si R raza de convergenta.*

(1) *Daca exista* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \in [0, \infty]$ *atunci* $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.
(2) *Daca exista* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty]$ *atunci* $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Observatie 5.1.3. Daca raza de convergenta a seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este R si ea a fost calculata cu una dintre formulele de mai sus, atunci si seria derivatelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ este o serie de puteri care are raza de convergenta R si, de asemenea seria "primitivelor" $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$. De exemplu daca $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|na_n|}{|(n+1)a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|(n+2)a_n|}{|(n+1)a_{n+1}|} = R$.

Teorema 5.1.1. **Prima teorema a lui Abel**. *Fie seria de puteri $(*)$ si presupunem ca raza sa de convergenta este $R \neq 0$.*

(1) *Seria $(*)$ este absolut convergenta pentru orice $x \in \mathbb{R}$ petru care $|x| < R$ (adica $(-R, R) \subset C$);*
(2) *Daca $R < \infty$ atunci seria $(*)$ este divergenta pentru orice $x \in \mathbb{R}$ pentru care $|x| > R$ (adica pe $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ seria este divergenta);*

(3) *Pe orice interval compact* $[a,b] \subset (-R,R)$ *seria* $(*)$ *este uniform convergenta.*

Observatie 5.1.3. Conform teoremei lui Abel si teoremei de derivabilitate avem

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

pe orice interval $[a,b] \subset (-R,R)$. De asemenea, pe un astfel de interval avem, in acord cu teorema primitivelor

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemplul 5.1.3. Seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ are raza de convergenta $R = 1$ si multimea de convergenta $C = [-1,1]$.

Exemplul 5.1.4. Seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ are raza de convergenta $R = 1$ si multimea de convergenta $C = [-1,1)$.

Exemplul 5.1.5. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ are raza de convergenta $R = \infty$ si multimea de convergenta $C = \mathbb{R}$.

Exemplul 5.1.6. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ are raza de convergenta $R = 1$ si multimea de convergenta $C = (-1,1)$.

Exemplul 5.1.7. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ are raza de convergenta $R = 0$ si multimea de convergenta $C = \{0\}$.

Teorema 5.1.2. A doua teorema a lui Abel. *Fie seria de puteri* $(*)$ *si presupunem ca raza sa de convergenta este* $R \in (0,\infty)$. *Daca seria este convergenta in* $x = R$ *(* $x = -R$ *) atunci seria* $(*)$ *converge uniform pe intervalul* $[0,R]$ *(* $[-R,0]$ *) iar suma sa este continua in* $x = R$ *(in* $x = -R$ *).*

Exemplul 5.1.8.

2. 5.2. Serii Taylor

Seriile Taylor sunt generalizari ale seriilor de puteri.

Definitia 5.2.1. Serie Taylor. Raza de convergenta. O *serie de forma*

$$a_0 + a_1(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + a_2(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2 + \cdots := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{x}-\mathbf{a})^n$$

unde $a_n, a \in \mathbb{R}$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *se numeste* ***serie Taylor***, *sau* ***serie de puteri centrata*** *in* a.

Studiul unei asemenea serii se reduce, punand $\mathbf{x}-\mathbf{a}:=\mathbf{y}$, la seria de puteri

$$a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots:=\sum_{n=0}^{\infty}a_ny^n.$$

Daca R este raza de convergenta a acestei serii de puteri spunem ca R este ***raza de convergenta a seriei Taylor****. Sa observam ca, in virtutea primei teoreme a lui Abel, avem*

$$(a-R,a+R)\subset C$$

unde C este multimea de convergenta a seriei Taylor.

Observatia 5.2.1. Sa presupunem ca $S:C\to\mathbb{R}$ este suma seriei Taylor, adica

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\mathbf{x}-\mathbf{a})^n,x\in C.$$

Atunci avem

$$S'(a)=1!\cdot a_1,S''(a)=2!\cdot a_2,...,S^{(n)}(a)=n!\cdot a_n.$$

Prin urmare

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(a)}{n!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^n,x\in C$$

si $S\in C^{\infty}(a-R,a+R)$.

Ne punem problema:

daca f este o functie in ce conditii are loc egalitatea $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^n$?

In randurile urmatoare dam conditii suficiente pentru ca f sa admita o asemenea extindere in serie Taylor.

Definitia 5.2.2. Serie Taylor asociata unei functii. *Fie $A\subset\mathbb{R}$, a un punct interior al multimii A (i.e. $\exists\epsilon>0:(a-\epsilon,a+\epsilon)\subset A$) si $f:A\to\mathbb{R}$ o functie indefinit derivabila in punctul a. Numerele*

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!},n\in\mathbb{N}\text{ unde }f^{(0)}(a):=f(a)$$

se numesc ***coeficientii Taylor (Maclaurin*** *daca $a=0$) ai functiei f in punctul a, iar seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^n$$

se numeste ***seria Taylor (Maclaurin*** *daca $a=0$) asociata functiei f in punctul a,*

Nu intodeauna seria Taylor asociata unei functii indefinit derivabile intr-un punct are suma egala cu valoarea functiei in acel punct.

Exemplul 5.2.1. Se arata, prin inductie matematica, ca

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{(x-a)^2}} & \text{daca } x\neq a\\ 0 & \text{daca } x=a\end{cases}$$

este o functie indefinit derivabila in $x = a$ si ca toate derivatele sale sunt nule in acest punct: $f^{(n)}(a) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare seria Taylor asociata functiei in origine are suma nula in orice $x \in \mathbb{R}$, adica $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, S(x) = 0$ si

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^n \; \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Domeniul de convergenta a seriei Taylor asociate unei functii poate sa difere de domeniul de definitie al acelei functii.

Exemplul 5.2.2. Functia

$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + x)$$

este indefinit derivabila in $a = 0$, iar seria Maclaurin asociata ei are domeniul de convergenta $C = (-1, 1]$ si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \mathbf{x}^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathbf{x}^n, \forall x \in (-1, 1].$$

Definitia 5.2.2. Functie analitica. Dezvoltabilitate. Fie $f \in C^{\infty}(A)$, $A \subset \mathbb{R}$ si $a \in A$. Spunem ca f este analitica in a daca exista o vecinatate a acestui punct $V \subset A$ astfel incat f sa coincida cu suma seriei Taylor asociate, adica

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^n, \forall x \in V.$$

Mai spunem, in acest caz, ca f este dezvoltabila in serie Taylor (Maclaurin, daca $a = 0$) ia punctul (in jurul punctului) a.

Teorema urmatoare ne ofera conditiisuficiente de dezvoltabilitate.

Teorema 5.2.1. Criterii de dezvoltabilitate (M teste). *Fie $f \in C^{\infty}(A)$, $A \subset \mathbb{R}$ si $a \in A$. Daca exista o constanta pozitiva M si una dintre urmatoarele conditii este indeplinita*

(i): $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M^n$ *pentru orice $x \in A$ si pentru orice n natural*

(ii): $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$ *pentru orice $x \in A$ si pentru orice n natural*

atunci f este dezvoltabila in serie Taylor in jurul punctului a, adica

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^n, \forall x \in A.$$

3. 5.?. Exercitii

(1) Determinati domeniul de convergenta pentru urmaatoarele serii.
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^n}$
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(n+1)^n}$
(f) $\frac{x+1}{1\cdot 4^0} + \frac{(x+1)^2}{2\cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2} + \cdots$
(g) $\frac{2x-3}{1} - \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} + \cdots$

Raspunsuri. a. $[-3,3)$; b. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; c. $(-1,1]$; d. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; e. $(-e, e)$; f. $[-5,3)$; g. $(1,2]$.

(2) Determinati suma seriilor urmatoare.
(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$
(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 3^n}$
(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot x^n}{3^n}$
(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^n}$
(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)3^n}$
(f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n\cdot(x+1)^n}{3^n}$
(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n\cdot(x+1)^n}{(n+1)3^n}$

(3) Determinati domeniul de convergenta pentru urmaatoarele serii.
(a) $1 + \frac{2x}{\sqrt{5\cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9\cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13\cdot 5^3}} + \cdots$
(b) $1 - \frac{x^2}{3\cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^4}{3^2\cdot 3\sqrt{3}} - \frac{x^6}{3^3\cdot 4\sqrt{4}} + \cdots$
(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$
(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$
(e) $\frac{x-1}{1\cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{3\cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{5\cdot 2^3} + \cdots$
(f) $\frac{2x+1}{1} + \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(2x+1)^3}{7} + \cdots$

Raspunsuri. a. $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$; b. $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ c. $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$; d. $[-1,1]$; e. $[-1,3)$; f. $[-1,0)$.

(4) Determinati multimea de convergenta pentru urmatoarele serii.
(a) $1 + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 3^2} + \frac{x^6}{4\cdot 3^3} + \cdots$
(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{3n}}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$
(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^{2n}$
(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$

(5) Determinati suma seriei
(a) $1 + 2x^2 + 3x^4 + ...$
(b) $x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} + ...$
(c) $1 - 3x^4 + 5x^8 + ...$
(d) $1 - 4x^2 + 7x^4 - 10x^6 + ...$

The Full Title of an AMS Book or Monograph

The Author

Author Two

(A. U. Thor) Author address line 1, Author address line 2

Current address, A. U. Thor: Author current address line 1, Author current address line 2

E-mail address, A. U. Thor: `author@institute.edu`

URL: `http://www.author.institute`

Dedicated to the memory of S. Bach.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 05C38, 15A15; Secondary 05A15, 15A18

The Author thanks V. Exalted.

Abstract. Replace this text with your own abstract.

Contents

CHAPTER 1

6. Serii Fourier

Seriile Fourier sunt folosite in analiza semnalelor, in acustica, mecanica cuantica, in telecomunicatii, in analiza vibratiilor, in compresia datelor, şi, in general in analiza oricarui fenomen periodic. Tehnica folosita consta in scrierea functiei care modeleaza fenomenul periodic ca suma unei serii al carei termen general este un polinom trigonometric şi in analiza fenomenului cu ajutorul acestor polinoame. De exemplu prin aceasta procedura se poate optimiza proiectarea unui sistem de telecomunicatii care transporta date analizand informatiile furnizate de componentele spectrale ale unui semnal al acestor date.

1. 6.1. Serii trigonometrice. Conditiile lui Dirichlet

Seriile trigonometrice sunt serii de functii al caror termen general este un polinom trigonometric de forma $a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$, unde x este variabila reala.

Definitia 6.1.1. Serie trigonometrica. Pulsatie. Fie $\omega > 0$, şi $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *pentru orice n natural. O serie de functii de forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \qquad (*)$$

*se numeste **serie trigonometrica.** Numarul pozitiv ω se numeste **pulsatie** (sau **faza**) (pentru seria $(*)$).*

Observatia 6.1.1. Fie seria trigonometrica $(*)$ şi $S : C \to \mathbb{R}$ suma sa. Daca multimea de convergenta este nevida atunci functia suma este periodica, de perioada principala $T := \frac{2\pi}{\omega}$. Intr-adevar

$S(x+T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega \left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + b_n \sin n\omega \left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x = S(x)$

pentru orice $x \in C$.

Exemplul 6.1.1. Seria trigonometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx$ are pulsatia $\omega = 1$. Deoarece $\left|\frac{1}{n^2} \sin nx\right| \leq \frac{1}{n^2}$ pentru orice x real, iar seria numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergenta, urmeaza , conform teoremei lui Weierstrass, ca multimea de convergenta este $\mathbb{R}$ şi seria este uniform convergenta pe toata axa reala.

Definitia 6.1.2. Conditiile lui Dirichlet pentru o functie periodica. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie periodica de perioada principala $T > 0$. Spunem ca functia f **satisface conditiile lui Dirichlet** daca pe orice interval de lungime T de forma* $[\alpha, \alpha + T]$

- *f este **continua pe portiuni** pe $[\alpha, \alpha+T]$, intelegand prin aceasta ca f este continua sau are un numar finit de discontinuitati de prima speta (reamintim ca $a \in [\alpha, \alpha+T]$ este o discontinuitate de speta intai daca f admite limite laterale finite in a, cel putin una dintre ele fiind diferita de valoarea functiei in a; deci*
  - *exista si este finita limita laterala la stanga*
  $$f(a-0) := \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x);$$
  - *exista si este finita limita laterala la dreapta*
  $$f(a+0) := \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$$

  şi $f(a) \neq f(a-0)$ *sau* $f(a) \neq f(a+0)$;
- *f este **monotona pe portiuni** pe $[\alpha, \alpha+T]$, adica intervalul $[\alpha, \alpha+T]$ admite un numar finit de subintervale de monotonie ale functiei f (deci exista o diviziune a intervalului $[\alpha, \alpha+T]$ de forma $x_0 = \alpha < x_1 < ... < x_n = \alpha + T$ astfel ca f sa fie monotona pe (x_{i-1}, x_i) pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$).*

Exemplul 6.1.2. Functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x) = \cos \alpha x$, unde $\alpha > 0$ este o functie periodica de perioada principala $T = \frac{2\pi}{\alpha}$. Sa consideram un interval de lungime T, de exemplu $[-\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}]$. Cum functia f este continua pe acest interval (deci este continua pe portiuni) şi intervalul $[-\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{\alpha}]$ are doua subintervale de monotonie - pe $(-\frac{\pi}{\alpha}, 0)$ functia este crescatoare iar pe $(0, \frac{\pi}{\alpha})$ este descrescatoare - (deci f este monotona pe portiuni) rezulta ca functia f satisface conditiile lui Dirichlet.

Definitia 6.1.3. Conditiile lui Dirichlet petru o functie definita pe un interval marginit. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o functie, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval marginit de forma $[a, b)$, (a, b) sau $(a, b]$. Fie $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functia periodica, de perioada $T := b - a$ a carei restrictie la intervalul I este chiar functia f, adica **extensia (sau extinderea) prin periodicitate** a functiei f. Spunem ca functia $f : I \to \mathbb{R}$ satisface conditiile lui Dirichlet daca si numai daca extensia sa $\widetilde{f}$ satisface conditiile lui Dirichlet.*

- Reamintim ca daca $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ atunci **extinderea prin periodicitate a functiei** f este functia $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita prin
  $$\widetilde{f}(x) := f(x - kT), x \in [a + kT, b + kT), k \in \mathbb{Z}$$
  unde $T := b - a$ este perioada extensiei (si desigur, $\widetilde{f}\mid_{[a,b)} = f$).

Observatia 6.1.2. Conform definitiilor 6.1.2 si 6.1.3 functia periodica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica conditiile lui Dirichlet daca si numai daca exista un interval $[a, b]$, unde $b-a$ este perioada lui f astfel incat restrictia $f\mid_{[a,b]}$ satisface conditiile lui Dirichlet.

- Reamintim ca daca $f : A \to \mathbb{R}$ si $B \subset A$ functia $f\mid_B : B \to \mathbb{R}$, $f\mid_B (x) = f(x)$se numeste **restrictia functiei f la multimea** B.

Observatia 6.1.3. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o functie, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval marginit de forma $[a, b)$, (a, b), sau $(a, b]$. Conform definitiilor 6.1.2 si 6.1.3 functia f satisface conditiile lui Dirichlet daca este marginita, continua pe portiuni (adica este continua sau admite un numar finit de discontinuitati de speta intai) si monotona

pe portiuni (adica admite un numar finit de subintervale de monotonie). Prin urmare verificarea conditiilor lui Dirichlet nu impune extinderea functiei f prin periodicitate.

Exemplul 6.1.3. Functia definita prin

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 \text{ daca } x \in [-1,1) \\ x^2 \text{ daca } x \in [1,2) \end{cases}$$

este continua pe portiuni pe $I = [-1,2)$ (deoarece f este marginita si $a = 1$ este singurul punct de discontinuitate de speta intai, intrucat $f(1-0) = f(1) = 0 \neq f(1+0) = 1$); f este monotona pe portiuni: este descrescatoare pe subintervalul $(-1,1)$ şi crescatoare pe $(1,2)$. In consecinta functia f satisface conditiile lui Dirichlet.

2. 6.2. Serii Fourier

In cele ce urmeaza vom construi o serie trigonometrica pornind de la o functie periodica ce satisface conditiile lui Dirichlet.

Definitia 6.2.1. Seria Fourier asociata unei functii periodice. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie periodica, de perioada principala T, care satisface conditiile lui Dirichlet si $\omega := \frac{2\pi}{T}$. Atunci numerele*

$$a_n := \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx,\ n \in \mathbb{N} \text{ si}$$

$$b_n := \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin n\omega x dx,\ n \in \mathbb{N}^*$$

*se numesc **coeficientii Fourier** ai functiei f iar seria trigonometrica construita cu acesti coeficienti, i.e.*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \qquad (*)$$

*se numeste **seria Fourier** a functiei f, sau **dezvoltarea functiei f in serie Fourier**.*

Remarcam faptul ca, in conditiile definitiei de mai sus

- daca f este o functie para (i.e. $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$) atunci

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos n\omega x dx,\ n \in \mathbb{N},\ \text{iar } b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

  In acest caz seria Fourier $(*)$ asociata functiei f este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x;$$

  vom spune, in acest caz, ca *seria* $(*)$ *este **dezvoltarea in serie de cosinusuri a functiei** $f\,|_{[0,\frac{T}{2})}$* .

- daca f este o functie impara (i.e. $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$) atunci

$$a_n = 0,\ n \in \mathbb{N}^*,\ \text{iar } b_n = \frac{4}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\omega x dx, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

In acest caz seria Fourier $(*)$ asociata functiei f este

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x;$$

vom spune, in acest caz, ca *seria* $(*)$ *este* ***dezvoltarea in serie de sinusuri a functiei*** $f\left|_{[0,\frac{T}{2})}\right.$.

Observatia 6.2.1. Reamintim ca, in conditiile definitiei precedente, coeficientii Fourier ai functiei f se pot calcula pe orice interval de lungime T (functiile $x \longmapsto f(x)\cos n\omega x$, respectiv $x \longmapsto f(x)\sin n\omega x$ fiind periodice, de perioada T). Deci

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{a}^{a+T} f(x)\cos n\omega x \cdot dx,\ n \in \mathbb{N} \text{ si}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{b}^{b+T} f(x)\sin n\omega x \cdot dx,\ n \in \mathbb{N}^*$$

oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Urmatoarea definitie este de fapt o conventie: *prin dezvoltarea in serie Fourier a unei functii definite pe un interval marginit vom intelege de fapt dezvoltarea prelungirii acesteia prin periodicitate, perioada fiind lungimea intervalului de definitie.*

Definitia 6.2.2. Seria Fourier asociata unei functii definite pe un interval marginit. *Fie* $a < b < \infty$ si $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *o functie care satisface conditiile lui Dirichlet. Definim* $T := b - a$ *si* $\omega := \frac{2\pi}{T}$. *Functia*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = f(x - kT), \forall x \in [a + kT, b + kT), \forall k \in \mathbb{Z}$$

este o functie periodica de perioada T *care satisface conditiile lui Dirichlet, si, a carei restrictie la intervalul* $[a, b)$ *este chiar functia* f. *Vom spune ca seria Fourier si coeficientii Fourier ai functiei* F *sunt* ***seria Fourier***, *respectiv* ***coeficientii Fourier ai functiei*** f. *Analog definim seria , respectiv coeficientii Fourier pentru o functie definita pe un interval de forma* $(a, b]$.

Observatia 6.2.2. Daca avem o functie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este de forma $[0, b), (-b, 0], [0, b], [-b, 0]$ si $b < \infty$ iar functia satisface conditiile lui Dirichlet si dorim sa o dezvoltam in serie de cosinusuri, atunci -cum functia f nu este para- trebuie sa prelungim functia f prin paritate, deci sa dezvoltam functia

$$f_p : (-b, b) \to \mathbb{R}, f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{daca } x \in [0, b) \\ f(-x) & \text{daca } x \in (-b, 0) \end{cases}.$$

Sa remarcam faptul ca, in acest caz, perioada este lungimea intervalului de definitie a functiei f_p, adica $T = 2b$, pulsatia este $\omega = \frac{\pi}{b}$, **iar coeficientii Fourier se pot calcula folosind functia** f direct, deoarece $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ si

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f_p(x)\cos(n\omega x)\, dx = \frac{2}{b}\int_0^{b} f(x)\cos(n\omega x)\, dx, n \in \mathbb{N}.$$

Observatia 6.2.3. Daca avem o functie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este de forma $[0,b), (-b,0], [0,b], [-b,0]$ si $b < \infty$ iar functia satisface conditiile lui Dirichlet si dorim sa o dezvoltam in serie de sinusuri, atunci -cum functia f nu este impara- trebuie sa prelungim functia f prin imparitate, deci sa dezvoltam functia

$$f_i : (-b,b) \to \mathbb{R}, f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{daca } x \in [0,b) \\ -f(-x) & \text{daca } x \in (-b,0) \end{cases}.$$

Sa remarcam faptul ca, in acest caz, perioada este lungimea intervalului de definitie a functiei f_i, adica $T = 2b$, pulsatia este $\omega = \frac{\pi}{b}$, **iar coeficientii Fourier se pot calcula folosind numai functia** f direct, deoarece $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ si

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f_p(x)\sin(n\omega x)\,dx = \frac{2}{b}\int_0^{b} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, n \in \mathbb{N}^*.$$

Instrumentul esential de lucru cu seriile Fourier este dat de teorema lui Dirichlet.

Teorema 6.2.1. Teorema lui Dirichlet. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie periodica de perioada T care satisface conditiile lui Dirichlet. Atunci seria Fourier asociata functiei f este convergenta pe $\mathbb{R}$, iar suma sa $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are expresia analitica*

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Observatia 6.2.4. Sa remarcam ca, in conditiile teoremei, daca x este un punct de continuitate pentru functia f atunci $S(x) = f(x)$.

Exemplul 6.2.1. Sa incercam sa aflam care este seria Fourier asociata functiei $f(x) = tgx, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Primul pas pe care trebuie sa-l facem este sa vedem daca

Exemplul 6.2.2. *Fie* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{daca } x \in [0,1) \\ 0 & \text{daca } x = 1 \end{cases}$. Sa se determine urmatoarele.

(1) Seria Fourier asociata acestei functii si suma sa.
(2) Seria Fourier de cosinusuri.
(3) Seria Fourier de sinusuri.
(4) Sumele seriilor numerice.
(5) $s = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$.

Rezolvare. 1. Primul lucru pe care trebuie sa-l facem pentru o asocia o serie Fourier unei functii este sa verificam conditiile lui Dirichlet (daca acestea nu sunt verificate, atunci nu se pune problema seriei Fourier asociate). Cum functia noastra este marginita si are un singur punct de discontinuitate de speta intai ($x = 1$), functia este continua pe portiuni; este si crescatoare pe $(0,1)$, deci monotona pe portiuni; prin urmare satisface conditiile lui Dirichlet. Lungimea intervalului de definitie este chiar perioada sumei seriei Fouriei asociate, deci aici $T = 1$. Suma seriei Fourier a functiei f este, conform teoremei lui Dirichlet, este chiar extinsa prin periodicitate a functiei noastre in punctele de continuitate, adica $S(x) = 1$, pentru $x \in \mathbb{R} \diagdown \mathbb{Z}$, iar in punctul de discontinuitate al functiei f limitele laterale pentru extensia prin periodicitate sunt egale cu 1, adica $S(x) = 1$, pentru $x \in \mathbb{Z}$. Deci

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ S(x) = 1$$

este suma seriei Fouriei asociate, iar $a_n = b_n = 0 \forall n \geq 1$ si $a_0 = 2$, adica seria Fourier are forma triviala: 1.

2.: Prelungita prin paritate -pe care trebuie sa o consideram in cazul unei serii de cosinusuri- verifica de asemenea conditiile lui Dirichlet si este $f_p(x) = \begin{cases} 1 \text{ daca } x \in (-1,1) \\ 0 \quad \text{daca } x = 1 \end{cases}$; deci, ca in primul caz, seria este triviala, i.e. 1, iar suma ei este functia $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $S(x) = 1$.

3.: Trebuie sa prelungim functia prin imparitate. Aceasta prelungire este $f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{daca } x \in [0,1) \\ 0 & \text{daca } x = (-1,0) \cup \{1\} \end{cases}$. In acest caz perioada este lungimea intervalului, adica $T = 2$, pulsatia este $\omega = \pi$ si, conditiile Dirichlet fiind satisfacute, avem $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_i(x)\, dx = \int\limits_0^1 dx = 1$ si $b_n = \frac{4}{T} \int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega x)\, dx = \int\limits_0^1 \sin(n\pi x)\, dx = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 \text{ daca } n = 2m \\ \frac{2}{n\pi} \text{ daca } n = 2m+1, m \in \mathbb{N} \end{cases}$. In consecinta seria de sinusuri a functiei f si suma sunt date de

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)\pi x = \begin{cases} 1 \text{ daca } x \in (2k, 2k+1) \\ \frac{1}{2} \text{ daca } x = k \\ 0 \text{ daca } x \in (2k-1, 2k) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

4.: Punand in identitatea precedenta $x = \frac{1}{2}$, deoarece $\sin \frac{(2m+1)\pi}{2} = (-1)^m$, obtinem $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = 1$, de unde $s = \frac{\pi}{4}$.

3. 6.3. Probleme rezolvate

Problema 6.3.1. Fie $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ definita prin:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ daca } x \in [0, \pi) \\ 0, \text{ daca } x = \pi \\ 2, \text{ daca } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

(a) Aratati ca functia f verifica conditia lui Dirichlet si scrieti suma S pentru seria lui Fourier asociata functiei f.

(b) Scrieti seria lui Fourier asociata lui f.

(c) Scrieti extinderea functiei f intr-o serie cosinus;

(d) Demonstrati ca $s_1 = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$ si $s_2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(4k+1)^2 (4k+3)^2} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{128}$.

Solutie. (a) Functia f este marginita (de fapt $f(x) \in [0, 2]$, pentru toti $x \in [0, 2\pi)$), crescatoare, si are un punct unic de prima specie de discontinuitate in $a = \pi : f(\pi - 0) = 1$ si $f(\pi + 0) = 2$.

Prin urmare conditia lui Dirichlet este verificata. In acest caz suma $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie periodica, si conform teoriei lui Dirichlet: $S(x) = \frac{1}{2}[g(x - 0) + g(x + 0)], \forall x \in \mathbb{R}$, unde g este prelungire functiei f de periodicitate cu perioada

principal $T = 2\pi$, i.e. $g(x) = f(x - 2k\pi), x \in [2k\pi, (2kx \in [2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ prin urmare

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ daca } 0 \leq x - 2k\pi < \pi \Longleftrightarrow x \in [2k\pi, (2k+1)\pi) \\ 0, \text{ daca } x = (2k+1)\pi \\ 2, \text{ daca } \pi \leq x - 2k\pi < 2\pi \Longleftrightarrow x \in [(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi) \end{cases}$$

unde $k \in \mathbb{Z}$

Deoarece g este o functie continua pe $(2k, (2k+1)\pi) \cup ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$**,** rezulta ca $S(x) = g(x)$ pe aceste intervale**;** cand $x = 2k\pi$ avem $g(2k\pi - 0) = g(0 - 0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = 2$, si $g(2k\pi + 0) = g(0 + 0) = f(0 + 0) = 1$;

prin urmare $S(2k\pi) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$.Pentru $x = (2k+1)\pi$ avem:

$g((2k+1)\pi - 0) = g(\pi - 0) = f(\pi - 0) = 1$ si

$g((2k+1)\pi + 0) = g(\pi + 0) = f(\pi + 0) = 1$,

prin urmare $S((2k+1)\pi) = \frac{3}{2}$, pentru toti $k \in \mathbb{Z}$**;** in consecinta:

$$S(x) = \begin{cases} 1, \text{ daca } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ \frac{3}{2}, \text{ daca } x \in \{k\pi, k \in \ \mathbb{Z}\ \} \\ 2, \text{ daca } x \in ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi) \end{cases}$$

unde $k \in \mathbb{Z}$**.**

(b). De fapt vom dezvolta, la fel ca în defini■ie (v), functia periodica $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**,** cu perioada $T = 2\pi$ si pulsatia $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Vom calcula coeficientii lui Fourier: $a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) \cos(n\omega x) dx = \frac{2}{2\pi} \int\limits_0^T g(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx =$

$= \frac{1}{\pi} [\int\limits_0^{\pi} \cos nx dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} 2 \cos nx dx] = \frac{1}{\pi} [\frac{1}{n} \sin nx|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \sin nx|_{\pi}^{2\pi}] =$

$= \frac{1}{n\pi} [\sin x\pi + 2(\sin 2n\pi - \sin n\pi)] = 0$, daca $n \in \mathbb{N}^*$ si

$a_0 = \frac{1}{\pi} [\int\limits_0^{\pi} dx + 2 \int\limits_{\pi}^{2\pi} dx] = \frac{1}{\pi} (\pi + 2\pi) = 3.$

Analog pentru $n \in \mathbb{N}^*$:

$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) \sin(n\omega x) dx = \frac{2}{2\pi} \int\limits_0^T g(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx =$

$= \frac{1}{\pi} [\int\limits_0^{\pi} \sin nx dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} 2 \sin nx dx] = \frac{1}{\pi} [-\frac{1}{n} \cos nx|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \cos nx|_{\pi}^{2\pi}] =$

$= \frac{1}{n\pi} [(-1)^{n+1} + 1 - 2(1 - (-1)^n)] = \frac{1}{n\pi} [(-1)^n - 1]$, de unde $b_{2m} = 0, n \in \mathbb{N}^*$ si $b_{2m+1} = -\frac{2}{(2m+1)\pi}$, daca $m \in \mathbb{N}^*$;

in consecinta, seria lui Fourier asociata lui f este:

$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)x$ si suma sa $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definita la punctul (a). Particular pentru $x = \frac{\pi}{2}$ obtinem suma s_1 (din punctul (d)):

$1 = S(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1},$

prin urmare $s_1 = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}$.

Pentru a doua serie s_2 remarcam ca:

$\frac{2k+1}{(4k+1)^2 (4k+3)^2} = \frac{1}{8} [\frac{1}{(4k+1)^2} - \frac{1}{(4k+3)^2}].$

Pe de alta parte o primitiva a termenului general al seriei (1) este $\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)x$. Este natural sa punem intrebarea: poate fi integrata egalitatea termen cu termen:$\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)x=1, x\in(0,\pi)$?

Raspunsul este afirmativ (vezi ex. 6). Atunci avem:

$\frac{3x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)x=x+C, x\in(0,\pi)$

unde C este o constanta reala. Pentru $x=\frac{\pi}{2}$ in (3) obtinem $C=\frac{\pi}{4}$ si pentru $x=\frac{\pi}{4}$ avem: $\frac{3\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, prin urmare, deoarece

$\cos(2m+1)\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{m\pi}{2}-\sin\frac{m\pi}{2})=\begin{cases}\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} & m=2k\\ \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}} & m=2k+1\end{cases}$

rezulta ca:

$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(4k+1)^2}+\frac{(-1)^k}{(4k+3)^2}=\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8})=\frac{\pi^2}{16}$; aici vom folosit faptul că serile $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(4k+1)^2}$ si $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(4k+3)^2}$ sunt convergente absolut. Prin urmare, folosind (2): $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 8(2k+1)}{(4k+1)^2(4k+3)^2}$, sau $s_2=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{128}$.

(c) Definim o functie para $h:(-2\pi,2\pi)\to\mathbb{R}$ astfel incat $h(x)=f(x)$, pentru toti $x\in[0,2\pi)$. De fapt

$h(x)=\begin{cases}1, \text{ daca } x\in(-\pi,\pi)\\ 0, \text{ daca } x\in\{-\pi,\pi\}\\ 2, \text{ daca } x\in(-2\pi,-\pi)\cup(\pi,2\pi)\end{cases}$

si aflam coeficientii lui Fourier pentru h; in acest caz $T=4\pi$, $\omega=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$, $b_n=0$ pentru toti $n\in\mathbb{N}^*$ si $a_0=\frac{4}{T}\int\limits_0^{2\pi}h(x)\,dx=\frac{1}{\pi}(\int\limits_0^{\pi}dx+2\int\limits_{\pi}^{2\pi}dx)=3$;

pentru $n\geq 1$ avem

$a_n=\frac{4}{4\pi}\int\limits_0^{\frac{T}{2}}h(x)\cos(n\alpha x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)\cos\frac{nx}{2}dx=\frac{1}{\pi}[\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{nx}{2}dx+\int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{nx}{2}dx]=$ $\frac{1}{\pi}[\frac{2}{n}\sin\frac{nx}{2}\Big|_0^{\pi}+2\frac{2}{\pi}\sin\frac{nx}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}=\frac{2}{n\pi}[\sin n\pi+2(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2})]=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\left\{\begin{array}{c}0, for\ n=2m, m\in\mathbb{N}*\\ \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi(2m+1)}, n=2m+1, m\in\mathbb{N}\end{array}\right\}$

Prin urmare, cosinusul seriei pentru functia f este:

$\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+!}}{2m+1}\cos\frac{(2m+1)x}{2},\ \ x\in\mathbb{R}$.

Din teorema lui Dirichlet stim ca suma acestei serii este

$S(x)=\frac{1}{2}[H(x-0)+H(x+0)]$

unde H este prelungirea functiei h prin perioada cu $T=4\pi$. Prin urmare:

$S(x)=\begin{cases}1, \text{daca } x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\\ 2, \text{daca } x\in((2k+1)\pi,(2k+3)\pi\\ \frac{3}{2}, \text{daca } \quad x=(2k+1)\pi\end{cases}$

unde $k\in Z$. In plus, pentru $x=0$ avem:

$S(0)=1\iff\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m+1}=1\iff\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}=\frac{\pi}{4}$.

Problema 6.3.2. Fie $f:[0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$.

(a) Scrieti seriile lui Fourier pentru cosinusuri

(b)Calculati:

$s_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, s_2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}, s_3 = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}$, si $s_4 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.
(c) Construiti seria lui Fourier a sinusului pentru f.
Solution.(a) Prelungirea functiei f la o functie para este:
$g(x) = |x|, x \in (-1,1)$;
prin urmare $T = 1-(-1) = 2, \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi, b_n = 0, n \in \mathbb{N}^*$ si
$a_n = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} g(x)\cos(n\alpha x)dx = 2\int\limits_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx, n \in \mathbb{N}^*$
Atunci:
$a_0 = 2\int\limits_0^1 xdx = 1$, si pentru $n \in \mathbb{N}^*$**:**
$a_n = \frac{4}{T}\int\limits_0^1 x(\sin n\pi x)'dx = \frac{2}{n\pi}[x\sin n\pi x|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x|_0^1] = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] =$

$= \begin{cases} 0, \text{ daca } n = 2m, m \in \mathbb{N}^* \\ -\frac{4}{(2m+1)^2\pi^2}, \text{ daca } n = 2m+1, m \in \mathbb{N} \end{cases}$
$g \in C^0(-1,1)$, din teorema lui Dirichlet avem:
$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)x = |x|$, pentru $x \in (-1,1)$.
De fapt seria (1) are suma
$S(x) = \frac{1}{2}[g(x-kT-0) + g(x-kT+0)] = |x-2k|, x \in [2k-1, 2k+1), k \in \mathbb{Z}$,
cu diagrama:
LIPSESTE DIAGRAMA !
(b)Din(1), pentru $x = 0$ avem:
$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = 0 \Rightarrow s_2 = \frac{\pi^2}{8}$.
Dar
$s_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^2} + \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{4}s_1 + s_2$, prin urmare $s_1 = \frac{\pi^2}{6}$.
Remarcam:
$|\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)x| \le \frac{1}{(2m+1)^2}\forall x \in \mathbb{R}$, si $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}$ convergent,
prin urmare din criteriul lui Weierstrass ajungem la concluzia ca (*) este convergenta uniform si putem integra termen cu termen in (1):
$$\frac{x}{2} - \frac{4}{\pi^3}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}\sin(2m+1)\pi x = \frac{x^2}{2} + c, \forall x \in (-1,1) \qquad (2)$$
si pentru $x = 0$ obtinem constanta $c = 0$; pentru $x = \frac{1}{2}$ avem
$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^3}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}(-1)^m = \frac{1}{8} \Longleftrightarrow \frac{4}{\pi^3}s_3 = \frac{1}{8} \Longleftrightarrow s_3 = \frac{\pi^3}{32}$.
Din nou:
$|\frac{1}{(2m+1)^3}\sin(2m+1)\pi x| \le \frac{1}{(2m+1)^2}\forall x \in \mathbb{R}$**,**
si $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}$ convergent, prin urmare din criteriul lui Weierstrass seria (2) poate fi integrata terme cu termen (teorema continuitatii):
$$\frac{x^2}{4} + \frac{4}{\pi^3}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}\cos(2m+1)\pi x = \frac{x^3}{6} + k, x \in (-1,1) \qquad (3)$$
Fie $x = 0$ in (3); obtinem:
$\frac{4}{\pi^4}s = k$, unde $s = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}$; pentru $x = \frac{1}{2}$ in (3):

$\frac{1}{16} - \frac{4}{\pi^4}\sum\limits_{m=0}^{\infty} 0 = \frac{1}{48} + k \Longrightarrow \frac{1}{24}$ si $s = \frac{\pi^4}{96}$.

Mai mult:

$s_4 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^4} + \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{1}{16}s_4 + s$,, prin urmare $s_4 = \frac{\pi^4}{90}$.

(c) In acest caz $T = 2, a_n = 0$, pentru $n \in \mathbb{N}$ si

$b_n = \frac{4}{T}\int\limits_0^1 x(\sin n\pi x)dx = 2\int\limits_0^1 x(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x)'dx = -\frac{2}{n\pi}x\cos n\pi x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\Big|_0^1 =$
$\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$**,** prin urmare :

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x), x \in \mathbb{R}$

este seria lui Fourier a sinusului.Suma este prelungirea periodica pentru functia:

$h(x) = \begin{cases} x, \text{ daca } x \in (-1,1) \\ \frac{1}{2}[h(-1+0) + h(1-0)] = 0, \text{ daca } x = 1 \end{cases}$

Prin urmare:

$\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x) = \begin{cases} x - 2k, \text{ daca } x \in (2k-1, 2k+1) \\ 0, \text{ daca } x = 2k+1 \end{cases}$

unde $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 6.3.3. Fie $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$.

(a) Extindeti in seria lui Fourier aceasta functie si gasiti suma,

(b) Gasiti suma seriilor:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2+1}$, si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2+1}$.

Solutie. In timp ce $f \in C^0(-\pi, \pi]$ este marginita si crescatoare, conditiile lui Dirichlet sunt verificate, prin urmare seria lui Fourier este asociata lui f :

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\varpi x) + b_n \sin(n\varpi x)$,

este convergent pe $\mathbb{R}$, unde

$T = \pi - (-\pi) = 2\pi$

este perioada si

$\varpi = \frac{2\pi}{T} = 1$

este pulsatia; suma $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie periodica cu perioada $T = 2\pi$ si

$S(x) = \left\{ \begin{array}{c} e^{x-2k\pi}, x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}[S(2k-0) + S(2k+0)] = ch\pi, if x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$

Sa determinam coeficientii lui Fourier:

$a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi}[e^x - e^{-x}] = \frac{2}{\pi}sh\pi$, si pentru $n \geq 1$,

$a_n = \frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}[e^x \cos nx|_{-x}^{x} - n\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx] = (-1)^n \frac{2sh\pi}{\pi} - n^2 a_n$

prin urmare

$a_n = (-1)^n \frac{2sh\pi}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2+1}$,

si analogul

$b_n = (-1)^{n-1} \frac{2sh\pi}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2+1}$

pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$**.** In consecinta:

$S\left(x\right) = \frac{sh\pi}{\pi} + \frac{2sh\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx - n \sin nx)$

b) Pentru $x = 0$ obtinem

$S(0) = 1 = \frac{sh\pi}{\pi} + \frac{sh\pi}{\pi} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$,

prin urmare

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{2sh\pi} + \frac{1}{2}$ (1)

si pentru $x = \pi$ avem

$ch\pi = \frac{sh\pi}{\pi} + \frac{2sh\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$,

prin urmare

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi ch\pi}{2sh\pi} + \frac{1}{2}$ (2)

Dar seriile (1) si (2) sunt absolut convergente, prin urmare, adunandu-le obtinem:

$\frac{\pi(1+ch\pi)}{2sh\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4m^2+1}$

prin urmare

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4m^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4sh\pi}(1 + ch\pi)$,

si prin scaderea (1) si (2) urmeaza:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2+1} = \frac{\pi ch\pi}{4sh\pi}$.

Problema 6.3.4. Fie $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

(a) Extindeti f in seria lui Fourier.

(b) Scrieti seria sinusurilor asociata lui f.

(c) Extindeti f in cosinusul seriei.

(d) Gasiti suma seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Solutie. (a) Functia f este continua, marginita si crescatoare, prin urmare potrivit teoremei lui

Dirichlet, seria lui Fourier asociata e convergenta pe $\mathbb{R}$ si suma ei $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o functie periodica avand perioada $T = 1$ si pulsatia $\varpi = 2\pi$. Mai mult,

$S(x) = x$, daca $x \in (0, 1)$, si $S(0) = \frac{1}{2}[f(0 + 0) + f(1 - 0)] = \frac{1}{2}$, prin urmare:

$S(x) = \begin{cases} (x-k)^2, & \text{daca } x \in (k, k+1) \\ \frac{1}{2}, & \text{daca } x = k \end{cases}$ pentru oricare $k \in \mathbb{Z}$,

Si acum sa gasim coeficientii lui Fourier. In timp ce:

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^1 x^2 \cos 2n\pi x dx$, pentru $n \in \mathbb{N}$

avem

$a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$ si pentru $n \geq 1$:

$a_n = \frac{2}{2n\pi}\int_0^1 x^2(\sin 2n\pi x)' dx = \frac{1}{n\pi}x^2 \sin 2n\pi x|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 2x \sin 2n\pi x dx = \frac{2}{n\pi}\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 x(\cos 2n\pi x)' dx = \frac{1}{n\pi}x^2 \cos 2n\pi x|_0^1 + \frac{1}{n\pi}2\int_0^1 \cos 2n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 x(\sin 2n\pi x)' dx = \frac{1}{n^2\pi^2}$,

$b_n = 2\int_0^1 x \sin 2n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2} x \sin 2n\pi x|_0^1 - \frac{1}{n^2\pi^2}\int_0^1 \sin 2n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^3\pi^3} \cdot \cos 2n\pi x|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}$

Prin urmare, seria trigonometrica asociata lui f este

$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \cos 2n\pi x = S(x), x \in \mathbb{R}$.

(b) Extindem functia prin imparitate si o dezvoltam in seria trigonometrica. In acest caz, seria obtinuta este convergenta pe $\mathbb{R}$ si suma ei $S_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ va fii o functie perioadica avand perioada $T = 2$, pulsatia $\varpi = \frac{2\pi}{T} = \pi$ si :

$$S_1(x) = \begin{cases} (x-2k)^2, \text{ daca } x \in [2k, 2k+1) \\ -(x-2k)2, \text{ daca } x \in (2k-1, 2k) \\ 0, \text{ daca } x = 2k+1 \end{cases} \qquad \text{unde } k \in \mathbb{Z}$$

Mai mult, $a_n = 0, n \in \mathbb{N}$ si prin $n \geq 1$:

$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\sin(n\varpi x)d = \frac{4}{2}\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) = -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x^2(\cos n\pi x)'dx = -\frac{2}{n\pi}x^2\cos n\pi x|_0^1 +$ $\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\cos n\pi x dx = -\frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi}\frac{1}{n\pi}\int_0^1 x(\sin n\pi x)'dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^2\pi^2}x\sin n\pi x|_0^1 +$ $\frac{2}{n^3\pi^3}\cos n\pi x|_0^1 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1] = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{2}{2m\pi} = -\frac{1}{m\pi}, n = 2m \\ \frac{2}{(2m+1)\pi} - \frac{4}{(2m+1)^3\pi^3}, n = 2m+1 \end{array} \right\}$

Prin urmare

$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{m\pi}\sin 2m\pi x + [\frac{2}{(2m+1)\pi} - \frac{4}{(2m+1)^3\pi^3}]\sin(2m+1)\pi x$.pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

(c) Extindem functia $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ in seria trigonometrica; din nou $T = 2, \varpi = \pi$, si

$S_2(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n+1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, S_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

unde suma S_2 este o functie periodica avand perioada $T = 2$,

$S_2(x) = g(x-2k) = (x-2k)^2, x \in (2k-1, 2k+1), k \in \mathbb{Z}$

Aici

$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\varpi x dx = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx,$

prin urmare

$a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$, si pentru $n \geq 1$,

$a_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x^2(\sin n\pi x)'dx = \frac{2}{n\pi}x^2\sin n\pi x|_0^1 - \frac{2}{n\pi}2\int_0^1 x(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi})'dx = \frac{4}{n^2\pi^2}x\cos n\pi x|_0^1 =$ $\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$.

In consecinta

$S_2(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x), x \in \mathbb{R}$.

In particular:

$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x), x \in (-1, 1) \qquad (*)$.

(d) Fie $s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ si $s_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}$.

Atunci

$s_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^2} = s - \frac{1}{4}s = \frac{3}{4}s$.

Pe de alta parte pentru $x = 0$ in (*) avem:

$0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}(-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - ...) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2} -$ $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(4m+1)^2}) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{4}s - \frac{4}{\pi^2}s_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}s - \frac{3}{\pi^2}s = -\frac{2}{\pi^2}s + \frac{1}{3}$,

prin urmare:
$s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.
Criteriul lui Weierstrass si teorema continuitatii implica, din (*):
$\frac{x^3}{3}+A=\frac{x}{3}+\frac{4}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin(n\pi x), x\in(-1;1)$
unde, pentru $x=0$ obtinem $A=0$; integram dinou termen cu termen si obtinem:
$\frac{x^4}{12}+B=\frac{x^2}{6}+\frac{4}{\pi^4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\cos(n\pi x), x\in(-1,1)$.
Pentru $x=0$ in (1) obtinem:
$B=\frac{4}{\pi^4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$
si pentru $x=\frac{1}{2}$ in (1) obtinem:
$\frac{1}{12\cdot 16}+B=\frac{1}{24}+\frac{4}{\pi^4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\cos\frac{n\pi}{2}\underset{n=2m}{=}\frac{1}{24}+\frac{4}{\pi^4}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{-1}{16m^4}\cos(m\pi)=\frac{1}{24}+\frac{1}{4\pi^4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^4}=\frac{1}{24}+\frac{1}{16}B$,
prin urmare
B=$\frac{7}{12\cdot 15}$. Daca $a=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, $b=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}$, avem
$B=\frac{4}{\pi^4}(1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+...)=\frac{4}{\pi^4}(b-\frac{1}{16}a)$;
dar
$a=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^4}+\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(4m+1)^4}=\frac{1}{16}a+b, b=\frac{15}{16}a$,
si
$B=\frac{4}{\pi^4}(\frac{15}{16}a-\frac{1}{16}a)=\frac{7a}{2\pi^4}=\frac{7}{12\cdot 15}$;
in consecinta $a=\frac{\pi^4}{90}$.

4. 6.4. Exercitii

(1) Fie $f:[-a,0]\to\mathbb{R}$ o functie care satisface conditiile lui Dirichlet. Care sunt formulele de calcul a coeficientilor Fourier pentru seria Fourier de sinusuri asociata?
(2) Fie $f:[-a,0]\to\mathbb{R}$ o functie care satisface conditiile lui Dirichlet. Care sunt formulele de calcul a coeficientilor Fourier pentru seria Fourier de cosinusuri asociata?
(3) Fie $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ o functie care satisface conditiile lui Dirichlet. Demostrati ca prelungirea prin paritate a acestei functii verifica conditiile lui Dirichlet.
(4) Fie $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ o functie care satisface conditiile lui Dirichlet. Demostrati ca prelungirea prin imparitate a acestei functii verifica conditiile lui Dirichlet.
(5) Scrieti seria Fourier pentru $f(x)=x^2$ pe intervalul $[0,2\pi]$ apoi pe intervalul $[-\pi,\pi]$.
(6) Incercati sa scrieti seria Fourier pentru functia
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} \text{ daca } x\in[0,1]\\ x^2 \text{ daca } x\in(1,2]\end{cases}.$$
(7) Folosind seria de cosinusuri pentru functia $f(x)=x$ pe intervalul $[0,\pi]$, determinati sumele urmatoarelor serii numerice:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)^2}$.

(8) Scrieti seria Fourier pentru functia

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ daca } x \in (-\pi, 0) \\ 1 \text{ daca } x \in (0, \pi) \\ 0 \text{ daca } x \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}.$$

Trasati apoi graficele functiei f si a sumei seriei Fourier gasite.

(9) Scrieti si reprezentati grafic suma seriei Fourier asociate functiei $f(x) = e^x, x \in [0, \pi]$, fara a determina coeficientii Fourier.

(10) Determinati seria Fourier a functiei $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ daca } x \in [0, 2] \\ -x \text{ daca } x \in (2, 3] \end{cases}$. Reprezentati in acelasi sistem de axe graficele sumei acestei serii si al functiei f.

(11) Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Aratati ca

$$\pi \cos ax = 2a \sin a\pi \left[\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{a^2 - n^2} \right] \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Determinati apoi sumele seriilor numerice

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}$

(12) Gasiti $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel incat suma $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trigonometrica a seriei lui Fourier asociata functiei $f : I \to \mathbb{R}$ are perioada egala cu lungimea lui I si $S(x) = f(x)$,pentru toti $x \in I$, unde:

(a) $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \alpha, x \in [1, 2] \\ \beta, x = 2 \\ \gamma, x \in [2, 3] \end{cases}$

(b) $f : (0, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x,\ x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \alpha, x = \frac{\pi}{2} \\ \cos x, x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ \beta, x = \pi \\ 13, x \in (\pi, 5) \\ \gamma, x = 5 \end{cases}$

(c) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, x \in [-1, 0) \\ \alpha, x = 0 \\ x^2 + \beta, x \in (0, 1) \\ \gamma, x = 1 \end{cases}$

Raspunsuri: a) $\alpha = \beta = \gamma \in \mathbb{R}$, b) $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 6, \gamma = \frac{13}{2}$, c) $\alpha = \gamma = -1, \beta = -2$.

(13) Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Folosind teorema lui Dirichlet aratati ca exista o serie trigonometrica pe $\mathbb{R}$ a carei sume S este o functie periodica avand perioada $T = b - a$ astfel incat $S(x) = f(x)$, pentru toate punctele continue $x \in (a, b)$, apoi aflati $S(x)$ unde:

(a) $f:(1,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x-x^2, x\in(1,2]\\3x^2-x, x\in(2,3)\end{cases}$

(b) $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\in(-\pi,0)\\ shx, x\in(0,2\pi)\end{cases}$

(c) $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$,$f(x)=\begin{cases}\tan x, x\in(0,\frac{\pi}{4}]\\ 12, x\in(\frac{\pi}{4},\pi)\end{cases}$.

Raspunsuri: a) $S(x)=f(x-2k\pi)$, daca $x\in(2k+1,2k+3)\backslash\{2(k+1)\}, S(2k+1)=13, S(2k)=6$ unde $k\in\mathbb{Z}$
b) $S(x)=f(x-3k\pi)$ daca $x\in((3k-1)\pi,(3k+2)\pi)\backslash\{3k\pi\}, S(3k\pi)=0, S((3k-1)\pi)=\frac{1}{2}sh4\pi$, unde $k\in\mathbb{Z}$
c) $S(x)=f(x-k\pi)$, daca $x\in(k\pi,(k+1)\pi)\backslash\{(4k+1)\frac{\pi}{4}\}$, $S(k\pi)=6$, $S((4k+1)\frac{\pi}{4})=\frac{13}{2}$ unde $k\in\mathbb{Z}$.

(14) Fie $f:[0,a)\to\mathbb{R}$. Demonstrati ca exista o serie cosinus, convergenta pe $\mathbb{R}$ a carei sume S este o functie periodica continua, a carei perioade este $2a$ astfel incat $S(x)=f(x)$, pentru toti $x\in[0,a)$, si gasiti $S(x), x\in\mathbb{R}$ in urmatoarele cazuri:

(a) $f:[0,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)$

(b) $f:[0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in[0,1]\\3-x-x^2, x\in(1,\pi)\end{cases}$

(c) $f:[0,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1-x, x\in[0,1]\\ \sin(x-1), x\in(1,3)\end{cases}$

Raspunsuri: a) $S(x)=\ln(1-x-4k)$ daca $x\in[4k-2,4k]$, $S(x)=\ln(x+1-4k)$ daca $x\in[4k,4k+2]$,unde $k\in\mathbb{Z}$
b) $S(x)=(x-2k\pi)^2$, daca $x\in[2k\pi-1,2\pi k+1]$, $S(x)=3-x+2k\pi-(x-2k\pi)^2$,daca $x\in(2k\pi+1,(2k+1)\pi)$,
$S(x)=3+x-2k\pi-(x-2k\pi)^2$,daca $x\in[(2k-1)\pi,2k\pi-1]$,unde $k\in\mathbb{Z}$
c) $S(x)=\sin(6k-x-1)$, daca $x\in[6k-1,6k]$, $S(x)=1-6k+x$, daca $x\in[6k,6k+1]$ si $S(x)=\sin(x-6k-1)$, daca $x\in[6k+1,6k+3]$.

(15) Fie $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ cu ajutorul seriei trigonometrice obtinute aratati ca:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...=\frac{\pi^2}{12} \text{ si } 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...=\frac{\pi^2}{6}.$$

(16) Construiti o serie Fourier pentru urmatoarele functii periodice cu perioada 2π :

(a) $f(x)=1$, pentru $x\in(0,\pi)$, si $f(-x)=-f(x)$

(b) $f(x)=x$ pentru $x\in[0,\pi]$ si $f(-x)=f(x)$; aratati ca $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

(c) $f(x)=\begin{cases}\pi, \text{ pentru } x\in(-\pi,0)\\ \pi-x, \text{ pentru } x\in[0,\pi]\end{cases}$

Raspunsuri: a) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, b) $\frac{\pi}{4}-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, c) $\frac{3\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos(nx)}{n^2}$.

(17) Extindeti in serii Fourier urmatoarele functii periodice cu perioada $2l$:

(a) $f(x)=1$, pentru $x\in(0,1), f(-x)=-f(x)$

(b) $f(x)=1-x$, pentru $x\in[0,1], f(-x)=f(x)$,$l=1$

(c) $f(x)=\left\{\begin{array}{c} 0, x\in(-l,0] \\ x, x\in[0,l) \end{array}\right.$.

Raspunsuri: a) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi x}{l}}{2n+1}$, b)$\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)nx}{(2n+1)^2}$, c)$\frac{1}{4}-$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{\pi^l(1n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)}{l}+\frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{l}$.

(18) Extindeti urmatoarele functii in serii Fourier:

(a) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ pentru $x\in(0,\pi]$, $f(-x)=f(x)$, $f(x+2\pi)=f(x)$

(b) $f(x)=|\sin x|$; cu ajutorul seriei obtinute aratati ca $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^n-1}=\frac{1}{2}$.

(c) $f(x)=\left\{\begin{array}{c} x,\ \text{pentru } x\in[0,\frac{\pi}{2}] \text{ si } f(-x)=-f(x) \\ \pi-x,\ \text{pentru } x\in[\frac{\pi}{2},\pi] \text{ si } f(-x)=-f(x) \end{array}\right.$

(d) $f(x)=x$ pentru $x\in[0,1]$, $f(-x)=f(x)$, $f(x+2l)=f(x)$.

(e) $f(x)=\left\{\begin{array}{c} 1,\ \text{pentru } x\in[-1,0] \text{ si } f(x+2)=f(x) \\ x,\ \text{pentru } x\in(0,1] \text{ si } f(x+2)=f(x) \end{array}\right.$

(f) $f(x)=e^x$ pentru $x\in(-1,1)$, $f(x+2l)=f(x)$.

Raspunsuri: a)$\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}[\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+...]$;
b)$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}[\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+...]$
c)$\frac{4}{\pi}[\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-...]$;
d)$\frac{1}{2}-\frac{4l}{\pi^2}[\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{\cos\pi x}{l}+...]$;
e)$\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}[\frac{\cos\pi x}{1^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+...]-\frac{1}{\pi}[\frac{\sin\pi x}{1}+\frac{\sin 2\pi x}{2}+...]$;
f) $shl[\frac{1}{l}-2l(\frac{1}{n^2+l^2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{2^2\pi^2+l^2}\sin\frac{2\pi x}{l}+...)]$.

(19) Fie $f:[0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

(a) Extindeti f in serie Fourier.

(b) Extindeti f in serie sinus.

(c) Extindeti f in serie cosinus.

(d) Gasiti suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(4n^2-1)}$.

Raspunsuri: a) si c) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}, x\in[0,\pi)$;

b) $f(x)=\sin x, x\in[0,\pi)$; d)$2-\pi+\frac{\pi^2}{12}$.

(20) Extindeti $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ in serie trigonometrica si gasiti $S(\pi)$, unde S este suma serilor pentru:

(a) $f(x)=\cos ax, a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$;

(b) $f(x)=a$ daca $x\in(-\pi,0]$ si $f(x)=b$, daca $x\in(0,\pi)$;

(c) $f(x)=shx, a\in\mathbb{R}$

Raspunsuri:

a) $f(x)=\frac{1}{a\pi}\sin a\pi+\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{a^2-n^2}, S(\pi)=\cos a\pi$

b) $f(x)=\frac{a+b}{2}-\frac{2(a-b)}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, S(\pi)=\frac{a+b}{2}$

c) $f(x)=\frac{2sha\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{a^2+n^2}\sin nx, S(\pi)=0$.

(21) Demonstrati ca:

(a) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)nx}{(2n-1)^2}=\left\{\begin{array}{c} x, x\in(0,1] \\ 2-x, x\in(1,2) \end{array}\right.$;

(b) $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2nx}{4n^2-1}=\begin{cases}\cos x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]\\ -\cos x, x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$;

(c) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}=x^2, x\in[0,\pi]$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-3)^3}=\frac{\pi^3}{32}$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^5}=\frac{5\pi^5}{1536}$.

(22) Fie $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

(a) Extindeti f intr-o serie Fourier trigonometrica.

(b) Extindeti f intr-o serie Fourier a functiei sinus.

(c) Extindeti f intr-o serie Fourier a functiei cosinus.

(d) Gasiti sumele seriilor numerice:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Raspunsuri: a) si b) $f(x)=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}, x\in(0,\pi)$

c) $f(x)=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, x\in(0,\pi)$

d) $\frac{\pi^2}{8},\frac{\pi^2}{6},\frac{\pi^2}{24},\frac{\pi^3}{32}$.

Vom generaliza noţiunea de distanţă din $\mathbb{R}$. Distanţa dintre numerele $x, y \in \mathbb{R}$ este numărul pozitiv $|x-y|$; in $\mathbb{R}^2$ distanţa dintre punctele de coordonate $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ este numărul pozitiv $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$.

Definiţie: Presupunem că funcţia cu valori reale

$$d : M \times M \to [0, \infty),$$

unde M este o mulţime nevidă, verifică următoarele trei axiome pentru orice $x, y, z \in M$:

- $(\mathbf{M_1})$ $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$.
- $(\mathbf{M_2})$ $d(x, y) = d(y, x)$.
- $(\mathbf{M_3})$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inegalitatea triunghiului).

(i). O astfel de funcţie d se numeţe metrică, (sau distanţă) pe M (pentru M). Mulţimea M înzestrată cu o metrică d-notată (M, d)- se numeşte spaţiu metric; pentru $x, y \in M$, numărul pozitiv $d(x, y)$ se numeşte distanţă între x şi y; $x \in M$ este numit punct (din spaţiul metric M).

(ii). Fie (X, d) un spaţiu metric , $a \in X$ un punct şi fie $r > 0$. Mulţimea :

$$S(a, r) = \{x \in X : \quad d(a, x) < r\}$$

se numeşte bilă deschisă de rază r cu centru în a.

Exemplu: Fie X o mulţime nevidă. Definim :

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq y \\ 0, & \text{dacă } x = y. \end{cases}$$

Atunci d este distanţă pe X numită *metrica discretă.* Dacă $r > 0$ şi a este un punct din X atunci $S(a, r) = \{a\}$.

Exemplu: Funcţia

$$d : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to [0, \infty), \quad d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$$

verifică $(\mathbf{M_1})$, $(\mathbf{M_2})$ şi $(\mathbf{M_3})$, deci $(\mathbb{N}^*, d)$ este un spaţiu metric.
De exemplu, distanţa dintre punctele 3 şi 13 este:

$$d(3, 13) = \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{13}\right| = \frac{10}{39},$$

iar bila cu centrul în 1 şi de rază $r = 1$ este :

$$S(1, 1) = \left\{n \in \mathbb{N}^* : \quad \left|1 - \frac{1}{n}\right| < 1\right\} = \mathbb{N}^*,$$

în timp ce bila cu centrul în 1, de rază $\frac{1}{10}$ este:

$$S(1, \frac{1}{10}) = \left\{ n \in \mathbb{N}^* | : \left| 1 - \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{10} \right\} = \{1\},$$

deoarece inecuaţia de mai sus este echivalentă cu $n < \frac{10}{9}$, deci $n = 1$.

Exemplu: Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Functia

$$d : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to [0, \infty), d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_p - y_p)^2},$$

pentru $x = (x_1, ..., x_p), y = (y_1, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p$, este un spaţiu metric pe $\mathbb{R}^p$, numit şi spaţiul Eculidian $\mathbb{R}^p$.

- Pentru $p = 2$,

  $$S((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad d((0, 0), (x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2} < 1\},$$

  deci bila cu centrul în $(0, 0)$ şi de rază 1 este un disc deschis.

- Pentru $p = 3$,

  $$S = ((0, 0, 0), 1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

  este "mingea" cu centrul în $(0, 0, 0)$ şi de rază 1.

Exemplu: Fie $p \in \mathbb{N}^*$ şi $d : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to [0, \infty)$, definită prin

$$d((x_1, ...x_p), (y_1, ...y_p)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_p - y_p|.$$

Atunci $(\mathbb{R}^p, d)$ este un spaţiu metric.

Dacă $p = 2$, atunci bila centrată în origine şi de rază 1, este

$$S((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \max\{|x|, |y|\} < 1\},$$

deci imaginea geometrică a acestei bile este, în acest caz, interiorul unui pătrat.

În aceste exemple, spaţiul liniar $\mathbb{R}^p$, peste câmpulnumerelor reale, a fost înzestrat cu o metrică, de exemplu cu metrica euclidiană. Drept consecinţă, orice vector din $\mathbb{R}^p$ are o lungime, şi anume distanţa sa la origine (vectorul nul). Vom prezenta în cele ce urmează o noţiune abstractă pentru lungimea unui vector într-un cadru mai general.

Definiţia 2: *Fie V un spaţiu liniar peste corpul numerelor reale. O funcţie $\nu : V \to [0, \infty)$ este numită normă pe V, dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:*

- (N_1) $\nu(v) = 0$ *dacă şi numai dacă* $v = 0$.

- (N_2) *$\nu(\lambda v) = |\lambda|\nu(v)$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi orice $v \in V$.*
- (N_3) *$\nu(u + v) \leq |\nu(u) + \nu(v)$ pentru orice $u \in V$ şi orice $v \in V$. Ultima inegalitate este cunoscută ca inegalitatea triunghiului.*

Un spaţiu liniar în zestrat cu o normă se numeşte spaţiu liniar normat. O notaţie uzuală pentru norma ν este $\| \cdot \|$, iar norma unui vector $v \in V$ va fi notată în mod uzual cu $\|v\|$ în loc de $\nu(v)$.

Notăm că dacă $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ sunt gândite ca spaţii liniare atunci valoarea absolută obişnuită $| \cdot |$ este normă pe aceste spaţii.

Teorema 1: Fie $(V, \| \cdot \|$ un spaţiu liniar normat şi

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad x, y \in V.$$

Atunci (V, d) este u spaţiu metric. De asemenea, dacă M este o submulţime nevidă a lui V atunci $(M, d_{|M})$ este un spaţiu metric.

Demonstraţie: Evident d este funţie cu valori pozitive. Avem:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

deci $(\mathbf{M_1})$ este îndeplinită. Pe de altă parte, aplicând $(\mathbf{N_2})$ petru $\lambda = -1$, obţinem

$$d(x, y) = \|x - y\| = \| - (x - y)\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

Acum, în baza lui $(\mathbf{N_3})$, putem scrie:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Prin urmare condiţiile $(\mathbf{eM_2})$ şi $(\mathbf{M_3})$ sunt îndeplinite.

Exemplul 6: Fie $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_p^2} - \text{ norma euclidiană;}$$

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + \cdots |x_p| \text{şi}$$

$$\|x\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots |x_p|\},$$

pentru $x = (x_1, x_2, \cdots x_p) \in \mathbb{R}^p$, sunt trei norme pe $\mathbb{R}^p$, (vezi Ex.3-Ex.5).

Definiţie: *Fie V un spaţiul liniar peste corpul numerelor reale. O funcţie $\mu : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte produs scalar pe V dacă satisface următoarele patru axiome.*

- I_1 *$\mu(x + y, z) = \mu(x, y) + \mu(x, z)$, pentru orice $x, y, z \in V$.*
- I_2 *$\mu(x, y) = \mu(y, x)$ pentru orice $x, y \in V$.*

- I_3 $\mu(\alpha x, y) = \alpha\mu(x, y)$ *pentru orice* $x, y \in V$, *şi orice* $\alpha \in \mathbb{R}$.
- I_4 $\mu(x, x) \geq 0$ *pentru orice* $x \in V$, *şi* $\mu(x, x)) = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = 0$.

Remarcă Produsul scalar al vectorilor x şi y din V va fi notat prin $< x, y >$ sa chiar simplu $x \cdot y$. Produsul scalar (real) este o aplicaţie biliniară, adică este liniar în ambele variabile. Luate împreună, axiomele $(I_1) - (I_3)$, ne asigură că petru orice $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ din $\mathbb{R}$ şi orice x, y, x', y' din V, are loc:

$$< \alpha x+\beta y, \alpha' x'+\beta' y' >= \alpha\alpha' < x, x' > +\alpha\beta' < x, y' > +\beta\alpha' < y, x' > +\beta\beta' < y, y' > .$$

Un spaţiu liniar dotat cu un produs scalar $(V, < \cdot, \cdot >)$ satisface inegalitatea lui Schwarz, care o generalizare a biecunoscutei inegalităţi Cauchy-Schwarz.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ şi $1 \leq i \leq n$.

Teorema 2. Fie $(V, < \cdot, \cdot >)$ un spaţiu cu produs scalar şi x, y doi vectori arbitrari din V. Atunci

$$| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >} \tag{1}$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă unul dintre cei doi vectori este multiplul cu un scalar al celuilalt.

Demonstraţie: Dacă $< x, y >= 0$ atunci inegalitatea (1) este evidentă. Admitem că $< x, y >\neq 0$. În particular, vectorii x şi y sunt nenuli. Notăm $u(x, y) = \frac{<x,y>}{|<x,y>|}$ şi observăm că $u(x, y)^2 = 1$ şi

$$< x, u(x, y)y >=< u(x, y)x, y >= | < x, y > |.$$

Prin urmare, pentru orice $s \in \mathbb{R}$, avem că:

$$0 \leq< sx + u(x, y)y, sx + u(x, y)y >= s^2 < x, x > +2s| < x, y > |+ < y, y > . \tag{2}$$

Având în vedere că $< x, x >$ este diferit de zero, condiţia din (2) ne spune că discriminantul trinomului din dreapta semnului egal este negativ, adică

$$| < x, y > |^2 \leq< x, x >< y, y >,$$

care este echivalentă cu inegalitatea din (1).

Pe de altă parte, dacă inegalitatea în (2) este strictă pentru orice $s \in \mathbb{R}$ atunci discriminantul trinomului despre care vorbeam mai sus trebuie sa fie

strict negativ. Cu alte cuvinte, egalitatea în (1) impune egalitatea în (2) pentru cel puţin un număr real s. Acest s verifică şi $sx = -u(x, y)y$, fapt ce arată că egalitatea în (1) se realizează doar dacă unul dintre vectori este multiplu cu un scalar al celuilalt.

Exemplul 7: În spaţiul liniar $\mathbb{R}^p$, peste corpul $\mathbb{R}$, unde $p \in \mathbb{N}^*$, considerăm:

$$< x, y >:= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_py_p,$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p), y = (y_1, y_2, \cdots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. Acesta este un produs scalar numit *produsul scalar euclidian*.

Teorema 3. Fie $(V, < \cdot, \cdot >)$ un spaţiu cu produs scalar. Spaţiul V poate fi normat (deci se poate şi metriza) în următorul mod:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}, \quad x \in V.$$

Aceasta este o normă pe V, deci $(V, \| \cdot \|)$ devine spaţiu normat.

Demonstraţie: Dacă $\|x\| = 0$ atunci $< x, x >= 0$ deci $x = 0$. În plus, este clar că $\|x\| = \sqrt{< x, x >} \geq 0$, pentru orice $x \in V$. Petru a deduce axioma (N_2), procedăm astfel. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{< \lambda x, \lambda x >} = \sqrt{(\lambda)^2 < x, x >} = |\lambda| < x, x > .$$

În fine, pentru a deduce inegalitatea triunghiului din definiţia normei, utilizăm inegalitatea lui Schwarz, astfel:

$$\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >\leq$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

În consecinţă, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pentru orice $x, y \in V$, adică (N_3) este verificată.

Remarcă: Produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^p$ (vezi Ex. 7) induce prin (Th. 3) o normă euclidiană (vezi Ex.6), care induce la rândul ei pri (Th. 1) metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^p$ (vezi Ex. 3).

Următoarea identitate, cunoscută ca *legea paralelogramului*, are loc în spaţii cu produs scalar.

Teorema 4. Dacă $(V, < \cdot, \cdot >$ este un spaţiu cu produs scalar, atunci

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2 \tag{3}$$

pentru orice $x, y \in V$.

Demonstraţie:

$$\|x+y\|^2 =< x+y, x+y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \text{ şi}$$

$$\|x-y\|^2 =< x+y, x+y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y > .$$

Prin adunarea acestor relaţii se obţine (3).

Remarcă: Teorema stabileşte că într-u spaţiu cu produs scalar, înzestrat cu norma sa naturală, suma pătratelor lungimilor diagonalelor sale este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor sale. un corolar imediat este identitatea:

$$\frac{1}{2}[< x, y > + < y, x >] = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2].$$

Exemplul 8. Fie $C^0[a,b]$ spaţiul liniar al tuturor funcţiilor continue de la $[a,b]$ la $\mathbb{R}$. Definim:

$$< f, g >:= \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in C^0[a,b].$$

Acesta este un produs scalar pe $C^0[a,b]$. care induce norma

$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx, \quad f \in C^0[a,b].$$

1 ELEMENTE DE TOPOLOGIE

Aici vom prezenta concepte precum cele de *vecinătate a unui punct, puncte de acumulare, limite, puncte limită* pentru spaţiul $\mathbb{R}$ sau pentru spaţii mai generale cum ar fi spaţiile metrice.

Fie (X,d) un spaţiu metric.

Definiţia 4. (i). *Vom spune că mulţimea $G \subset X$ este deschisă dacă ea este nevidă, sau dacă pentru orice $a \in G$ există $r > 0$ astfel încât $S(a,r) \subset G$. Mulţimea $\mathcal{T}_d$ a tuturor mulţimilor deschise din spaţiul (X,d) este o topologie pe X, numită topologia indusă de metrica d.*

(ii) *O mulţime $V \subset X$ se numeşte vecinătate a punctului $a \in X$ şi notăm $v \in \mathcal{V}_x$ dacă există $r > 0$ astfel încât $S(a,r) \subset V$. An notat cu $\mathcal{V}_x$ mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului $x \in X$.*

O consecinţă imediată a definiţiei este:

Propoziţia 4: O mulţime $G \subset X$ este deschisă dacă şi numai dacă ea este vecinătate pentru orice punct al său.

Propoziţia 5: Orice spaţiu metric (X,d) are proprietatea lui Haussdorff, adică pentru orice $x, y \in X$, $x \neq y$ există $V \in \mathcal{V}_x$ şi $U \in \mathcal{V}_y$ astfel încât $U \cap V \neq \varnothing$, adică oricare două puncte diferite au vecinătăţi disjuncte.

Demonstraţie: Deorece $x \neq y$, distanţa $r := d(x,y)$ este strict pozitivă. Fie $U := S(x, r/3)$ şi $V = S(y, r/3)$. Este clar că $\in \mathcal{V}_x$ şi $V \in \mathcal{V}_y$. În plus, dacă ar exista $z \in U \cap V$ atunci din inegalitatea triunghiului, deducem

$$r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2\frac{r}{3},$$

care este o contradicţie. Rămâne că $U \cap V = \varnothing$.

Definiţie: *Fie (X,d) un spaţiu metric, $x \in X$ şi $A \subset X$ o mulţime nevidă. Vom spune că:*

- *x este punct aderent pentru mulţimea A dacă orice vecinătate a lui x intersectează mulţimea A, adică*

$$(\forall V)(V \in \mathcal{V}_x \to V \cap A \neq \varnothing);$$

- *x este punct de acumulare al mulţimii A, dacă*

$$(\forall V)(V \in \mathcal{V}_x \to V \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing);$$

- *x este punct izolat al mulţimii A, dacă*

$$(\exists V)(V \in \mathcal{V}_x \text{ şi } V \cap A = \{x\}).$$

Mulţimea A se numeşte închisă dacă complementara sa $C(A) := X \setminus A$ este o mulţime deschisă. Vom nota cu $\bar{A}$ mulţimea punctelor aderente lui A, cu $\operatorname{Iz}(A)$ mulţimea punctelor sale izolate, iar cu A' mulţimea punctelor sale de acumulare. Aceasta din urmă se mai numeţe şi derivata mulţimii A.

Remarci: Din definiţii rezultă:

- $x \in A'$ dacă şi numai dacă $x \in \bar{A}$ şi x nu aparţine la $\operatorname{Iz}(A)$.
- $\bar{A} = A' \cup \operatorname{Iz}(A)$.
- A este deschisă dacă şi numai dacă $C(A)$ este mulţime închisă.

Propoziţia 6. Mulţimea F este închisă în spaţiul metric (X,d) dacă şi numai dacă ea îşi conţine punctele de acumulare (adică dacă $F' \subset F$).

Demonstraţie: 1. Fie F închisă. Atunci $G \setminus F$ este deschisă, deci este şi vecinătate pentru oricare dintre punctele sale. Prin urmare, niciun punct

din G nu poate fi punct limită pentru F (deoarece $G \cap F \setminus \{x\}$ este mulţimea vidă). Deci punctele de acumulare ale lui F aparţin lui F, cu alte cuvinte F conţine toate punctele limită pe care ea le poate avea.

2. Dacă F îşi conţine punctele limită atunci pentru orice $x \in X \setminus F$ există o vecinătate deschisă a lui x astfel încât $V_x \cap F \setminus \{x\} = \varnothing$. În particular, $V_x \cap F \subset X \setminus F$. Atunci

$$X \setminus F = \cup \{V_x : \quad x \in X \setminus F, \quad V_x \in \mathcal{V}_x, \quad V_x \in \mathcal{T}_d\}$$

este o mulţime deschisă, fiind reuniunea unei colecţii de mulţimi deschise. Prin urmare F este mulţime închisă.

Propoziţia 7. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $\mathcal{T}_d$ topologia pe X generată de d. Atunci

- **(a)** Mulţimile $\varnothing$, X aparţin la $\mathcal{T}_d$.
- **(b)** Dacă G_1 şi G_2 aparţin la $\mathcal{T}_d$ atunci şi intersecţia lor $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_d$.
- **(c)** Pentru orice mulţime nevidă de indici I cu proprietatea că $G_i \in \mathcal{T}_d$ pentru fiecare $i \in I$, avem că

$$\cup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_d.$$

Demonstraţie: **(a)** Mulţimea vidă aparţine (prin definiţie) oricărei topologii în timp ce X conţine toate bilele deschise, deci $X \in \mathcal{T}_d$.

(b) Fie G_1 şi G_2 două mulţimi din $\mathcal{T}_d$ şi notăm cu G intersecţia lor. Dacă G_1 sau G_2 este mulţimea vidă atunci şi G este mulţimea vidă, caz în care nu rămâne nimic de demonstrat. Analizăm acum cazul când G_1 şi G_2 au intersecţia nevidă. Fie $x \in G$. Atunci $x \in G_1$ şi $x \in G_2$. Din definiţie există $r_1 > 0$ şi $r_2 > 0$ astfel încât $S(x, r_1) \subset G_1$ şi $S(x, r_2) \subset G_2$. Fie $r := \min\{r_1, r_2\}$. Este clar că $S(x, r)$ este submulţime atât pentru G_1 cât şi pentru G_2. Prin urmare $S(x, r) \subset G$, deci $G \in \mathcal{T}_d$.

(c) Dacă $G = \cup_{i \in I} G_i = \varnothing$ atunci $G \in \mathcal{T}_d$, iar în caz contrar există $x \in G$ deci există şi $j \in I$ astfel încât $x \in G_j$. Dar $G_j \in \mathcal{T}_d$, deci există $r > 0$ astfel încât $S(x, r) \subset G_j \subset G$, fapt care probează că $G \in \mathcal{T}_d$.

Ţinând cont de relaţiile lui De Morgan din teoria mulţimilor

$$C(\cup_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} C A_i, \quad C(\cap_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} C A_i,$$

obţinem:

Propoziţia 8: Fie (X, d) un spaţiu metric şi $\mathcal{F}_d$ colecţia tuturor mulţimilor închise ale lui X. Atunci

- **(a)** Mulţimile $\varnothing$, X aparţin la $\mathcal{F}_d$.
- **(b)** Dacă F_1 şi F_2 aparţin la $\mathcal{F}_d$ atunci şi reuniunea lor $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{F}_d$.
- **(c)** Pentru orice mulţime nevidă de indici I cu proprietatea că $F_i \in \mathcal{F}_d$ pentru fiecare $i \in I$, avem că

$$\cap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}_d.$$

Exemplul 9. Fie $A = [0,1] \times (1,2) \cup \{(2,2)\}$ submulţime a spaţiului euclidian $\mathbb{R}^2$. Atunci:

(a) A nu este deschisă deoarece punctul $(1,0)\imath A$, dar pentru orice $r > 0$ bila $S((1,0), r)$ nu este inclusă în A.

(b) A u este nici închisă, deoarece $G := \mathbb{R}^2 \setminus A$ nu este deschisă (punctul $(1,1) \in G$ şi pentru orice $r > 0$ bila $S((1,1), r)$ nu este inclusă în G).

(c) Iz $(A) = \{(2,2)\}$, deoarece $S((2,2),1) \cap A = \{(2,2)\}$ deci $(2,2)$ este punct izolat pentru A, şi orice alt punct din A este punct de acumulare pentru A.

(d) $\bar{A} = [0,1] \times [1,2] \cap \{(2,2)\}$ şi $A' = [0,1] \times [1,2]$.

Definiţie: Fie (X, d) un spaţiu metric, $A \subset X$ şi $a \in X$.

- **(i)** Punctul a este numit punct interior pentru A dacă $A \in \mathcal{V}_a$. Vom nota cu $\mathrm{Int}(A)$ mulţimea punctelor interioare ale lui A.
- **(ii)** Punctul a se numeşte punct exterior al lui A dacă a este punct interior pentru $X \setminus A$. Notăm cu $\mathrm{Ext}(A)$ mulţimea punctelor exterioare lui A.
- **(iii)** Punctul a se numeşte punct frontieră al mulţimii A dacă el este punct aderent atât pentru A cât şi pentru $X \setminus A$. Notăm cu $\mathrm{Fr}(A)$ mulţimea punctelor frontieră ale lui A.

Propoziţia 9: Dacă (X, d) un spaţiu metric şi A o submulţme nevidă a lui X, atunci:

- **(a)** $\mathrm{Int}(A)$ este cea mai mare mulţime deschisă (în sensul relaţiei de incluziune) conţinută în A.
- **(b)** $\bar{A}$ este cea mai mică mulţime închisă care conţine pe A.
- **(c)** $\mathrm{Fr}(A)$ este o mulţime închisă.

Demonstraţie: **(a)** Fie $a \in \mathrm{Int}(A)$. Atunci, din definiţie rezultă că există $r_a > 0$ astfel încât $S(a, r) \subset A$. Cum $S(a, r)$ este deschisă avem şi $S(a, r) \subset \mathrm{Int}(A)$. Urmează:

$$\mathrm{Int}(A) \subset \cup_{a \in \mathrm{Int}(A)} S(a, r) \subset \mathrm{Int}(A),$$

fapt care arată că Int(A) este mulţime deschisă (reuniune de mulţimi deschise). Dacă B este o mulţime deschisă inclusă în A atunci B este vecinătate pentru orice punct al său deci $B \subset \text{Int}(A)$, ceea ce înseamnă că Int(A) este cea mai "largă" mulţime deschisă conţinută în A.

(b) Avem de arătat că $\bar{A}$ este intersecţia tuturor mulţimilor închise care includ mulţimea A. Demonstraţia poate fi realizată în două etape.

1. $\bar{A}$ este închisă şi conţine A, caz în care include şi intersecţia despre care vorbeam mai sus.

2. $\bar{A}$ este inclusă în intersecţia tuturor mulţimilor închise care includ mulţimea A. Pentru a dovedi acest ultim fapt, fie $x \in \bar{A}$ şi să admitem prin absurd că există o mulţime închisă F cu $A \subset F$ şi astfel încât x nu aparţine la F. Atunci $x \in CF$ care este o vecinătate deschisă a lui x şi $CF \subset CA$. Cu alte cuvinte, CF este o vecinătate a lui x care nu intersectează mulţimea A. Am ajuns la contradicţie cu ipoteza $x \in \bar{A}$.

Pentru a finaliza demonstraţia a rămas să arătăm că $\bar{A}$ este o mulţime închisă. Vom arăta că $\bar{A}$ îşi conţine punctele de acumulare şi aplicăm Propoziţia 6, de mai sus. Fie $x \in (\bar{A})'$. Atunci pentru orice vecinătate deschisă V_x a lui x avem că $V_x \cap \bar{A} \setminus \{x\} \neq \varnothing$. Prin urmare, există $y \in V_x \cap \bar{A}$ cu $y \neq x$. Fiind deschisă v_x este vecinătate a lui y şi cum $y \in \bar{A}$ trebuie ca $V_x \cap A \neq \varnothing$. Dar V_x este vecināte deschisă arbitrară a lui x, deci $x \in \bar{A}$.

(c) Fr$(A) = \bar{A} \cap \overline{CA}$ şi este mulţime închisă fiind intersecţia a două mulţimi închise.

Exemplul 10. Fie $A = [0,1] \times (1,2) \cup \{(2,2)\}$ ca în Ex.9. Atunci:

$$\text{Int}(A) = (0,1) \times (1,2).$$
$$\text{Ext}(A) = \mathbb{R}^2 \setminus [0,1] \times [1,2] \cup \{(2,2)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{A}.$$
$$\text{Fr}(A) = \{(0,y) : y \in [1,2]\} \cap \{(1,y) : y \in [1,2]\} \cap$$
$$\cap \{(x,1) : x \in [1,2]\} \cap \{(x,2) : x \in [1,2]\} \cap \{(2,2)\}.$$

2 Şiruri

Într-un spaţiu metric general (X,d) noi gândim adesea un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ ca fiind imaginea funţiei $s : \mathbb{N}^* \to X$; pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*, s(n) = x_n$. Riguros vorbind, $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ nu este o submulţime de puncte din X (adică s poate să nu fie injectivă), dar dacă este clar înţeles că (x_n) este un şir vom scrie $(x_n) \subset X$.

Definiţie: Fie (X,d) un spaţiu metric. Şirul $(x_n) \subset X$ este convergent dacă

$$(\exists x)(\forall V)(\exists n_V)(\forall n)(x \in X, V \in \mathcal{V}_x, n_V \in \mathbb{N}, n \geq n_V \to x_n \in V)$$

Remarci: 1. Este evident din proprietatea lui Haussdorff că dacă un şir este convergent atunci x din definiţie este unic determinat şi se va numi limita şirului (x_n). Vom scrie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ sau simplu $x_n \to x$.

2. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- **(a)** $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
- **(b)** Pentru fiecare $V \in \mathcal{V}_x$ mulţimea $\{n \in \mathbb{N} : x_n$ nu aparţine mulţimii $V\}$ este finită.
- **(c)** Pentru orice $r > 0$ există $n(r) \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \in S(x, r)$ pentru orice $n \geq n(r)$.
- **(d)** Pentru orice $r > 0$ există $n(r) \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x) < r$ pentru orice $n \geq n(r)$.
- **(e)** $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

3. Daca $(V, \|\|)$ este un spatiu normat si $(x_n) \subset V$ atunci:
$x = \lim\limits_{n\to} x_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to} \|x_n - x\| = 0$
$\Longleftrightarrow [\forall\varepsilon > 0 \exists n\,(\varepsilon) \in$**IN** astfel incat $\|x_n - x\| < \varepsilon, \forall n \geq n\,(\varepsilon)]$.

Definitia 8. Un sir (x_n) intr-un spatiu metric se numeste un sir Cauchy (sau sir fundamental) daca:
$[\forall\varepsilon > 0 \exists n\,(\varepsilon) \in$**IN** astfel incat $d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall m, n \geq n\,(\varepsilon)]$, sau echivalent:
$[\forall\varepsilon > 0 \exists n\,(\varepsilon) \in$ **IN** astfel incat $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon, \forall n \geq n\,(\varepsilon)\,, \forall p \in IN]$.

Remarca. Sirul Cauchy, prin insasi natura "aspectului" convergent in unele spatii metrice, "limita" unui sir Cauchy s-ar putea sa nu existe in spatiu . De exemplu $x = [0, 1)$ este un spatiu metric cu distanta definita ca $d(x, y) = |x - y|\,; x_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in$**IN*** ce defineste un sir din X care este un sir Cauchy - intrucat (x_n) este un sit in **IR** si in IR,$x_n \to 1 (n \to \infty)$, si dupa cum stim in **IR** un sir este convergent daca si numai daca acesta este un sir Cauchy - dar nu este convergent (daca (x_n) este convergent in X, atunci $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [0, 1)$; dar $x_n \to 1$ in **IR** si de asemenea $x_n \to x \neq 1-$ contradictie !).

De asemenea
$(x_n) \subset$**Q,**$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in$ **IN***
este un sir Cauchy pe spatiul metric **Q** dar (x_n) nu converge la un numar in **Q.**

Asta ne aduce la o alta definitie.

Definitia 9. (i) Un spatiu metric (X, d) este declarat a fii complet daca fiecare sir Cauchy in spatiu converge la o limita care este de asemenea in X.

(ii) Un spatiu normat $(V, \|.\|)$ ce este complet cu respect catre distanta indusa se numeste un spatiu Banach.

(ii) Un spatiu cu un produs interior infinit dimensional $(V, < \cdot, \cdot >)$ ce este un spatiu Banac cu respect catre regula indusa se numeste spatiul Hilbert.

Exemplul 11. Spatiul Euclidian **IR** este un spatiu Banac, dupa cum am vazut in criterul convergentei generale in Capitolul 1.

Teorema 10. Intr-un spatiu metric fiecare sir convergent este un sir Cauchy.

Demonstratie. Sa presupunem ca (x_n), este un sir convergent in spatiul metric (X, d). Atunci $\exists x \in X$ astfel incat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, deci, pentru oricare $\varepsilon > 0$ exista un rank $n\,(\varepsilon) \in$ **IN** astfel incat $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, pentru oricare $n \geq n\,(\varepsilon)$.

Atunci, folosind inegalitatea triunghiului avem:

$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall m, n \geq n(\varepsilon)$ prin urmare (x_n) este un sir fundamental.

Teorema 11. Presupunem ca (x_n) este un sir intr-un spatiu metric (X, d) si $a \in X$ grup de punct a sirul. Atunci (x_n) contine un subsir (x_{k_n}) care converge la a.

Demonstratie. Cand spunem ca $x \in X$ este un grup de punct al $(x_n) \subset X$ s-ar putea sa nu fie clar ca ne referim ca a este un punct de acumulare al setului de puncte distincte a sirului. Daca punctul apare infinit de des ca un punct a sirului, atunci e usor sa vedem ca exista un subsir $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ unde $x_{k_n} = a$, $n \in$**IN***. Apare doar finit de des (poate nu apare deloc) in sir, ipoteza teoremei este aceea ca fiecare vecinatatea stearsa $V\backslash\{a\}$ ce contine un puncte al sirului.

Fie $(S_n)_{n \notin \mathbf{IN}}$ un sir descrescator cu sfera deschisa de raza $\frac{1}{n}$ centrata in a, de la fiecare, dintra care a a fost sters , ce este

$S_n := S(a, \frac{1}{n})\backslash P\{a\} n \in$**IN*.**

Fie $x_{k_1} \in \{x_m | m \in$**IN***$\} \cap S_1$. Acum S_2 trebuie sa contina un punct $x_{k_2} \in \{x_m | m \in$**IN,**$m \geq k_1 + 1\}$ intrucat fiecare S_n este necesar sa contina multe puncte ale (x_n). Asemanator, este un punct $x_{k_3} \in \{x_m | m > k_2\} \cap S_3$, si in general:

$x_{k_{n+1}} \in \{x_m | m > k_n\} \cap S_{n+1}$;

astfel obtinem un subsir $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ de termeni distinctie ai sirului original. Dar $x_{k_n} \in S_n$, prin urmare

$0 \leq d(x_{k_n}, a) < \frac{1}{k_n} \to 0$, cand $n \to \infty$;

prin urmare $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$.

Teorema 12. Spatiul Euclidian $\mathbf{IR}^p$ este un spatiu Banach, $p \in$**IN*.**

Demonstratie. Fie x$=(x_1, ..., x_p), y = (y_1, ..., y_p) \in \mathbf{IR}^p$. Atunci:

$$|x_k - y_k| \leq \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_k - y_k)^2} \leq \sqrt{p} \max\{|x_k - y_k| \, k = 1, 2, ..., p\} \tag{1}$$

pentru $k = 1, 2, ..., p$. Rezulta ca sirul (x_n), unde $x_n = (x_{1n}, ..., x_{pn})$ este convergent pe $x = (x_1, ..., x_p)$:

$x_n \to x \Longleftrightarrow [x_{kn} \to x_k$,pentru $k = 1, 2, ..., p]$

Din (1) rezi;ta ca (x_n) este un sir Cauchy in $\mathbf{IR}^p$ daca si numai daca sirul $(x_{kn})_{n \in \mathbf{IN}}$, $k = 1, 2, ..., p$ sunt toate siruri Cauchy

Fie acum $(x_n)_{n \in \mathbf{IN}}$ un sir Cauchy in $\mathbf{IR}^p$. Atunci pentru oricare $k \in \{1, 2, ..., p\}$, $(x_{kn})_{n \in \mathbf{IN}}$ este un sir Cauchy in **IR** prin urmare, din criteriul lui Cauchy rezulta ca (x_{kn}) este convergent in **IR**, exista $x_k \in$**IR** astfel incat $\lim\limits_{n\to\infty} x_{kn} = x_k, k = 1, 2, ..., p$.Prin urmare:

$\lim\limits_{n\to\infty} (x_{kn}) = (x_1, x_2, .., x_p)$, prin urmare (x_n) este un sir convergent.

4. TEOREME DE PUNCT FIX

Teoremele ce le vom prezenta in aceasta sectiune au multe aplicatii in teoria ecuatiilor diferentiale, in teoria ecuatiilor integrale, in teoria de aproximare, in teoria stabilitatii ecuatiilor functionale, etc.

Definitia 10. Fie (X, d) un spatiu metric si $f : X \to X$ o functie.

(i) Un punct $a \in X$ se numeste punct fix pentru functia f daca si numai daca $f(a) = a$. Notam $Fix(f)$ setul tuturor punctelor fixe ale functiei f.

(ii)Functia f se numeste contradictie de constanta α daca $\alpha \in (0,1)$ si $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y)$, pentru oricare $x, y \in X$.

Exempul 12. Fie **IR** un spatiu Euclidian $(d(x,y) = |x-y|, \forall x, y \in \mathbf{IR})$ si f :**IR**→**IR,**$f(x) = \sin x$. Aceasta functie are un punct fix unic si anume $Fix(f) = \{0\}$, dar f nu este o contradictie. Cu adevarat, daca presupunem ca exista un numar $\alpha \in (0,1)$ astfel incat:

$|\sin x - \sin y| \leq \alpha |x-y|, \forall x, y \in$**IR,** atunci, pentru $y = 0$ avem:

$|\sin x| \leq \alpha |x|, \forall x \in$**IR*,**de unde $1 = \lim\limits_{x \to 0} |\frac{\sin x}{x}| \leq \alpha$ in contradictie cu ipoteza $\alpha \in (0,1)$.

In randurile urmatoare vom da suficiente conditii in care o functie are un punct fix unic.

Teorema 13. (a punctului fix a lui Banach). Fie (X, d) un spatiu metric complet si $f : X \to X$ o contradictie de constante $\alpha \in (0,1)$. Atunci f are un punct fix unic. Mai mult, daca $x_0 \in X$ atunci sirul definit repetat:

$x_n = f(x_{n-1})$ pentru oricare $n \in$**IN*** **(*)**

converge la a si:

$d(x_n, a) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$, pentru oricare $n \in$**IN*.** (**)

Demonstratie. 1.Prima data aratam ca sirul construit la (*) este fundamental. Pnetru asta demonstram ca:

$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1), \forall\, n \in$**IN*** (1)

prin inductie pe n. Pentru $n = 1$, intrucat f e o contradictie, avem:

$d(x_1, x_2) = d(f(x_0) \cdot f(x_1)) \leq \alpha \cdot d(x_0, x_1)$.

Acum presupunem ca, pentru un $n \in$**IN*** fix, inegalitatea (1) este adevarata; atunci

$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_a) \cdot f(x_{n+1})) \leq \alpha \cdot d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^{n+1} d(x_0, x_1)$, si inegalitatea este demonstrata. Daca $p \in$**IN*,** din inegalitatea triunghiului si (1) avem:

$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + ... + \alpha^{n+p-1} d(x_0, x_1) = \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$

prin urmare:

$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1), \forall n \in$**IN*,**$p \in$**IN*** (2)

Daca $\varepsilon > 0$, intrucat $\alpha^n \to 0$, exista pe $n(\varepsilon) \in$**IN*** astfel incat $\frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < \varepsilon, \forall n \geq n(\varepsilon), \forall p \in$**IN*,** (x_n) este un sir Cauchy. Dar (X, d) este un spatiu metric complet, prin urmare (x_n) e convergent. Fie a limita:

$a := \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ (3)

2. Demonstram ca $a \in Fix(f)$. Folosind din nou faptul ca f este o contradictie si (3) avem:

$0 \leq d(f(x_n) \cdot f(a)) \leq \alpha \cdot d(x_n, a) \underset{n \to \infty}{\to} \alpha \cdot d(a, a) = 0,$

prin urmare

$d(f(x_n) \cdot f(a)) \to 0 \iff f(x_n) \to f(a) \iff x_{n+1} \to f(a)\,(n \to \infty)$, de unde $f(a) = a$ intrucat limita sirului (x_n) e unica.

3.Aratam ca a este unicul punct fix al functiei f.

Presupunem ca $b \in Fix(f)$, este $f(b) = b$. Atunci:

$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq \alpha \cdot d(a,b)$ sau

$(1-\alpha)\, d(a,b) \leq 0 \Longleftrightarrow d(a,b) \leq 0 \Longleftrightarrow d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$ prin urmare $Fixf = \{a\}$.

4.Pentru a arata inegalitatea (**) folosim inegalitatea triunghiului si (2); avem:

$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, a) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}(x_0, x_1) + d(x_{n+p}, a), \forall n, p \in$**IN***

si pentru $p \to \infty$ obtinem:

$d(x_n, a) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$, pentru oricare $n \in$**IN*.**

Aplicatii in Aproximari

Exemplul 13. Fie $f : [a,b] \to [a,b], f \in C^1[a,b]$ si presupunem $0 \neq \|f'\| := \sup\{|f'(x)| \, |x \in [a,b]\} < 1$. arata ca f are un punct fix unic.

Solutie. Fie $x, y \in [a,b]$ doua puncte arbitrare. Din teorema lui Lagrange rezulta:$\exists\zeta$ intre x si y astfel incat $f(x) - f(y) = f(\zeta)(x-y)$, prin urmare:

$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\| \cdot |x-y|, \forall x, y \in [a,b]$,

f este o contradictie de constanta $\|f'\|$. Dar $X = [a,b]$ este un spatiu metric complet, in ceea ce priveste distanta Euclidian. Prin urmare, teorema punctului fix a lui Banach implica faptul ca f are un punct fix unic.

Exemplul 14. Calculati radaciniile reale ale ecuatiei $x^5+10x-1 = 0$ (1)

cu exact 3 cifre.

Solutie. Fie

y :**IR**$\to$**IR,**$y(x) = x^5 + 10x - 1$; deoarece

$y(x) = 5x^4 + 10 > 0, \forall \in$**IR,**

y este o functie crescatoare, prin urmare ecuatia (1) are o radacina reala unica $a \in [0,1] := X$(intrucat$y(0) = -1 < 0 < y(1) = 10$).

Scriem ecuatia (1) in forma de $f(x) = x$ plasand:

$f(x) = \frac{1}{x^4+10}, f : X \to X$

unde $X = [0,1]$ este un spatiu metric complet (cu spatiul Euclidian $d(x,y) := |x-y|$. Vom demonstra ca f este o contradictie folsind Exercitiul 13. Avem:

$f'(x) = \frac{-4x^3}{(x^4+10)^2} \leq 0, x \in X$.

Prin urmare$f$ este o functie descrescatoare si imaginea ei:

$f(X) = f[0,1] = [f(1), f(0)] = [\frac{1}{11}, \frac{1}{10}] \subset X$,

f este definit corect; mai mult, $f \in C^1[0,1]$, prin urmare $f' \in C^0[0,1]$ si

$\|f'\| \leq |f'(x)| \leq \frac{4 \cdot 1}{(0+10)^2} = \frac{1}{25}, \forall x \in X$.

Din exercitiul 13 rezulta ca $f : X \to X$ este o contradictie de constanta $\alpha = \frac{1}{25}$, si putem aplicat teorema lui Banach. Fie $x_0 = 0$. Gasim $n \in$**IN*** astfel incat:

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) = \frac{1}{25^n\left(1-\frac{1}{25}\right)} \left|0 - \frac{1}{10}\right| = \frac{1}{25^{n-1} \cdot 24 \cdot 10} < \frac{1}{10^3}; \quad (3)$$

atunci:

$x_n \approx a, |x_n - a| < \frac{1}{1000}$,

eroarea este mai mica decat 10^{-3}. Observam ca pentru $n = 2$ inegalitatea (3) este verificata. Prin urmarea am obtinut exact solutia ecuatiei (1) aproximata exact cu trei cifre:

$a \approx x_2 = f(x_1) = f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{\frac{1}{10^4}+10} = \frac{10{,}000}{100{,}001} \approx 0.099$.

Aplicatie a ecuatiilor integrale

Pentru a ilustra o aplicatie a teoremei lui Banach, remarcam prima data ca $C^0[a,b]$ este un spatiu Banach, unde regula este definita:

$\|f\| = \sup\{|f(x)|\,|x \in [a,b]\}, \forall f \in C^0[a,b]$.

Exemplul 15. Fie $g \in C^0[a,b]$ si $\lambda \neq 0$ astfel incat:

$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} := \alpha,$

unde M este o constanta pozitiva pentru care $|x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dt, x \in [a,b]$ are o solutie unica.

Solutie. Este clar ca integrala exista si partea dreapta a ecuatiei este o functie continua pe x daca $f \in C^0[a,b]$; Problema noastra este daca exista sau daca nu exista o functie si numai o functie continua $f \in C^0[a,b]$ care va satisface ecuatia, facand o identitate in x pentru $x \in [a,b]$. Aplicam teorema dupa cum urmeaza:

definim functia $F(f)(x) = g(x) + \lambda \int\limits_a^b t \cdot f(t) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dt$

aratam ca F e o contradictie pentru $f_1, f_2 \in C^0[a,b]$,

$\|F(f_1) - F(f_2)\| = \left\| \lambda \int\limits_a^b [f_1(t) - f_2(t)] t e^{-\frac{x^2}{2}} dt \leq \lambda |M(b-a)\right\| f_1 - f_2|| = \alpha \|f_1 - f_2\|$

unde $a \in (0,1)$. Teorema garanteaza existenta unei $f \in C^0[a,b]$ unice, astfel incat $F(f) = f$.

Sir de puncte fixe

Definitia 11. Fie $(X,d), (Y,\delta)$ un spatiu metric si $f_n : X \to Y, n \in$**IN.**

Spunem ca sirul (f_n) este uniform convergent daca exista $f : X \to Y$ astfel incat:

$[\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in$**IN** astfel incat $\delta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall x \in X]$

Scriem in acest caz $f_n \overset{u}{\to} f\,(peX)$.

Teorema 14. Fie (X,d) un spatiu metric complet, $(f_n)_{n \in N}$ un sir convergent uniform : $f_n : X \to X, f_n \overset{u}{\to} f\,(peX)$. Daca:

(i)$Fix(f_n) \neq \emptyset, \forall n \in$**IN*;**

(ii)f este o contradictie de constanta α;

atunci orice sir (x_n) de puncte fixe, $x_n \in Fix(f_n)$ converge si are ca limita punctul fix unic de$f$.

Demonstratie. Teorema lui Banach implica faptul ca f are un punct fix unic. Fie $Fix(f) = \{x\}$. Trebuie sa aratam ca $x_n \to x$.

Avem:

$d(x_n, x) = d(f_n(x_n), f(x)) \leq d(f_n(x_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x)) \leq d(f_n(x_n), f(x)) + \alpha d(x_n, x)$, de unde:

$d(x_n, x) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(f_n(x_n), f(x_n)) \to 0$, cand $n \to \infty$, prin urmare $d(x_n, x) \to 0$, cand $n \to \infty$. Prin urmare $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Putem demonstra urmatoarea teorema de surjectivitate.

Teorema 15. Fie $(X, \|.\|)$ un spatiu Banach si $f : X \to X$ o contradictie de constanta α. Atunci $id_x - f$ e o functie surjectiva.

Demonstratie. Fie $y \in X$, fix si definit:

$h : X \to X, h(x) = f(x) + y$.

Atunci:

$\|h(x_1) - h(x_2)\| = \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\|$, prin urmare h este o contradictie de constanta α si prin teorema lui Banach exista un $x \in X$ unic astfel incat:

$h(x) = x \Longleftrightarrow f(x) + y = x \Longleftrightarrow x - f(x) = y.$

Prin urmare $id_x - f$ este o functie surjectiva.

5. PROBLEME REZOLVATE

Exercitiul 16. Fie {0,1} inzestrat cu adaosul modulo 2,

$x \oplus y = 0$ daca $x = y$ si $x \oplus y = 1$ daca $x \neq y$

Demonstrati ca $(\{0,1\}^p, d)$ e un spatiu metric unde $p \in$**IN***, si

$d(x,y) := \sum\limits_{k=1}^{p} x_k \oplus y_k = (x_1 \oplus y_1) + (x_2 \oplus y_2) + ... + (x_p \oplus y_p)$

pentru oricare $x = (x_1, ..., x_p), y = (y_1, ..., y_p) \in \{0,1\}^p$ (distanta Hamming, foarte folositoare in teoria codurilor; suma in definitia lui d e realizata in **IN,** prin urmare $d(x,y) \in \{0, 1, ..., p\}$. Gasiti $S((0,0,...,0), 1)$ si $S((0,0,...,0), 2)$.

Solutie. Verificam axioma M1,M2 si M3.

M1.

$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x_k \oplus y_k = 0, k = 1,2,...,p \Longleftrightarrow x_k = y_k, k = 1,2,...,p \Longleftrightarrow x = y.$

M2. E evident

M3. Fie $x = (x_1, ..., x_p), y = (y_1, ..., y_p), z = (z_1, ..., z_p) \in \{0,1\}^p$

Atunci:

$x_k \oplus z_k \leq (x_k \oplus y_k) + (y_k \oplus z_k)$, pentru $k = 1, 2, ..., p$

Intr-adevar, daca $x_k \oplus z_k = 0$ si inegalitatea e adevarata, si daca $y_k \neq z_k$, de exemplu $y_k = 0, z_k = 1$, atunci:

$(x_k \oplus y_k) + (y_k \oplus z_k) = y_k + (y_k \oplus 1) = 1 = x_k \oplus z_k$

Prin urmare $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Sfera centrata in (0,0,...,0) cu raza 1 este:

$S((0,0,...,0), 1) = \{x = (x_1, ..., x_p) | d(x, (0, ..., 0)) = x_1 + x_2 + ... + x_p < 1\} = \{(0,0,...,0)\}$

si pentru $r = 2$

$S((0,0,...,0), 2) = \{(x_1, ..., x_p) | x_1 + ... + x_p < 2\} = \{(1,0,...,0), (0,1,0,0), ..., (0,0,...,0,1)\}$

Exercitiul 17. Fie $A = \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x, y \geq 0, x + y < 1\}$.

Determinati seturile $\bar{A}, A^{\text{`}}, A, ExtA, FrA$ (in $\mathbf{IR}^2$ consideram topologia Euclidiana).

Solutie. Fie $O(0,0), M(1,0), N(0,1)$.

(a) Aratam ca:

$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x, y \geq 0, x + y \leq\} := B.$

Din definitia punctelor aderente rezulta ca $A \subset \bar{A}$. Fie $(a,b) \in \mathbf{IR}^2$ astfel incat

$a, b \geq 0, a + b = 1$ ce este $(a,b) \in B$. Fie $r > 0$. Atunci: $a \to x < \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}$ si $b - y < \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Avem:

$0 < x + y < a + b = 1$ si $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$; prin urmare:

$(x,y) \in A \cap S((a,b); r)$, prin urmare $(a,b) \in \bar{A}$.

Prin urmare $B \subset \bar{A}$.
Fie $(a,b) \in \mathbf{IR}^2 \backslash B$. Alegem
$r = \min\{d\,(P,OM)\,, d\,(P,ON)\,, d\,(P,MN)\}$,
unde P este punctul coodonatelor (a,b), si
$d\,(P,OM)\,, d\,(P,ON)\,, d\,(P,MN)$
sunt distantele dintre punctul P si liniile OM,ON, respectiv MN. Atunci:
$S\,(a,b) \cap A = \emptyset$,
prin urmare $(a,b) \notin \bar{A}$. Prin urmare $\mathbf{IR}^2 \backslash B \subset \mathbf{IR}^2 \backslash \bar{A} \Longleftrightarrow \bar{A} \subset B$.
Deci $\bar{A} = B = A$‘.
(b) Aratam ca $C := \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x, y > 0, x + y < 1\} = \dot{A}$
Fie $(a,b) \in C, r = \min\{d\,(P,OM)\,, d\,(P,ON)\,, d\,(P,MN)\}$, unde $P\,(a,b)$. Atunci:
$S((a,b)\,,r) \subset A$, prin urmare $(a,b) \in \dot{A}$, prin urmare $C \subset \dot{A}$
Daca $(a,b) \in \dot{A}$ atunci:
$\exists r > 0$ astfel incat $S((a,b)\,,r) \subset A$; dar $(a,b) \in S\,((a,b)\,;r)$, prin urmare $a, b \geq 0, a + b < 1$. Trebuie sa aratam ca $a > 0/$
Presupunem ca $a = 0$. Atunci pentru $x = -\frac{r}{2}, y = b$ avem:
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{r^2}{4} < r^2$, prin urmare $(x,y) \in S\,((a,b)\,,r)$ si $(x,y) \notin A$; contradictie ! Deci $\dot{A} \subset C$, prin urmare $\dot{A} = C$.
$a, b \geq 0, a + b = 1$,i.e. $(a,b) \in B$. Fie $r > 0$. Atunci: $a - x < \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}$ si $b - y < \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Avem: $a < x + y < a + b = 1$ si $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$; prin urmare: $(x,y) \in A \cap S((a,b);r)$, prin urmare $(a,b) \in \bar{A}$.
Deci $B \subset \bar{A}$.
Fie acum $(a,b) \in \mathbf{IR}^2 \backslash B$. Alegem $r = \min\{d(P,OM), d(P,ON), d(P,MN)\}$, unde P este punctul de coordonate (a,b), si $d(P,OM), d(P,ON), d(P,MN)$ sunt distantele dintre punctul P si dreptele OM, ON, respectiv MN.Atunci: $S((a,b),r) \cap A = \phi$, de aici rezulta ca $(a,b) \notin \bar{A}$. Prin urmare $\mathbf{IR}^2 \backslash B \subset \mathbf{IR}^2 \backslash \bar{A} \Leftrightarrow \bar{A} \subset B$.Prin uramre $\bar{A} = B = A'$.
(b)Vom arata ca $C := \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x, y > 0, x + y < 1\} = \overset{\circ}{A}$.
Fie $(a,b) \in C, r = \min\{d(P,OM), d(P,ON), d(P,MN)\}$, unde $P(a,b)$.Atunci:
$S((a,b),r) \subset A$,de aici rezulta ca $(a,b) \in \overset{\circ}{A}$ prin urmare $C \subset \overset{\circ}{A}$.
Daca $(a,b) \in \overset{\circ}{A}$ atunci:
$\exists r > 0$ a.i. $S((a,b),r) \subset A$;
dar $(a,b) \in S((a,b),r)$, prin urmare $a, b \geq 0, a + b < 1$.Trebuie sa aratam ca $a > 0$.
Presupunem ca $a = 0$. Atunci pentru $x = -\frac{r}{2}, y = b$ avem:
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{r^2}{4} < r^2$,de aici rezulta ca $(x,y) \in S((a,b),r)$ si $(x,y) \notin A$; contradictie! Deci $\overset{\circ}{A} \subset C$, si prin urmare $\overset{\circ}{A} = C$.
(c) Analog:
$Ext\ A = \mathbf{IR}^2 - \bar{A} = \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x < 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | y < 0\}$
$\cup\ \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x + y > 1\}$.
(d)Vom arata ca:

$D := \{(x,0) \in \mathbf{IR}^2 | x \in [0,1]\} \cup \{(0,y) \in \mathbf{IR}^2 | y \in [0,1]\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x+y=1, x \in (0,1)\} = Fr\ A$

Fie $(a,b) \in D$. Presupunem ca $a+b=1, a \in (0,1)$.Atunci pentru un r ales arbitrar $r>0$ si $x=a, y=b-c, z=b+c$, unde $c=\min\{\frac{b}{2}, \frac{r}{2}\}$ avem: $(x,y) \in S((a,b),r) \cap A$, si $(x,y) \in S((a,b),r) \cap C(A)$, prin urmare $(a,b) \in Fr\ A$. Cu argumente similarein demonstrarea restului incluziunii.

Exercitiul 18. Gasiti radacina reala a a ecuatiei $x^3+x-1000=0$ (1)

pana in 10^{-4}.

Solutie. Pentru a aplica teorema lui Banach trebuie sa scriem ecuatia (1) in forma $x=f(x)$. De exemplu putem scrie (1) de forma :

$x = \sqrt[5]{1000-x} := f(x)$

este evident ca radacina exacta $a \in (9,10)$, deci vom alege $x_0 = 10$. Avem:

$f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}}$, si pentru $x \in (9,10)$:

$|f'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} \approx \frac{1}{300} = \alpha.$

Dar $f[9,10] = [f(10), f(9)] = [\sqrt[3]{990}, \sqrt[3]{991}] \subset [9,10]$ prin urmare vom definii $f : X := [9,10] \to X, f(x) = \sqrt[3]{1000-x}$ si aceasta functie este o contractie de constante $\alpha = \frac{1}{300}, X = [9,10]$ este un spatiu metric complet si:

$x_n \to a$, unde $x_0 = 10, x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbf{IN}.$

Avem:

$x_1 = f(x_0) \approx 9.96655, x_2 \approx 9.96666, x_3 \approx 9.96667;$

prin urmare $a \approx 9.96667$.

Exercitiul 19. Gasiti radacina reala a ecuatiei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(n-1)!(2n-1)} = 0.4431135$$

pana in 10^{-5}.

Solutie. Putem scrie ecuatia in forma $x=f(x)$ pentru:

$f(x) = 0.4431135 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(n-1)!(2n-1)}, x \in \mathbf{IR},$ raza de convergenta este $R=\infty$. Dar $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(n-1)!} = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2(n-1)}}{(n-1)!} = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n}}{(n)!}$

$= x^2(1-e^{-x^2}) > 0$, pentru $x>0$

Prin urmare f este o functie crescatoare, $f[0.44, \frac{1}{2}] \subset [0.44, \frac{1}{2}]$ si $|f'(x)| \leq \frac{1}{16}$, pentru $x \in [0.44, \frac{1}{2}]$.Prin urmare putem aplica teoria lui Banach. Fie $x_0 = 0.44$. Atunci:

$x_1 = f(0.44) \approx 0.47;$
$x_2 = f(0.47) \approx 0.476;$
$x_3 = f(0.476) \approx 0.4767;$
$x_4 = f(0.4767) \approx 0.47689;$
$x_5 = f(0.47689) \approx 0.476927;$
$x_6 = f(0.476927) \approx 0.476934;$
$x_7 = f(0.476934) \approx 0.476936,$

si $|x_7 - x_6| < 10^{-5}$. Prin urmare $a \approx 0.47693$.

Exercitiul 20*.**Fie $(B, ||\cdot||)$ un spatiu Banach, $(x_n)_{k\geq 0}$ un sir in B, $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ un sir in $[0,\infty)$ si $m \in \mathbf{IR}$ astfel incat:

(i) $\beta := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m(k+1)}} \cdot \alpha_k < \infty$, si

(ii) $||x_{k+1} - 2^m x_k|| \leq \alpha_k, k \in \mathbf{IN}.$

Demonstrati ca $(\frac{1}{2^{mk}} x_k)_{k\geq 0}$ este un sir convergent si $||x - x_0|| \leq \beta$ unde $x = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2^{mk}} x_k$.

Solutie. Din ipoteza (ii) rezulta ca:

$||\frac{1}{2^{m(k+1)}} x_{k+1} - \frac{1}{2^{mk}} x_k|| \leq \frac{1}{2^{m(k+1)}} \alpha_k, k \in \mathbf{IN}$

Fie p un numar intreg pozitiv ales arbitrar.Atunci, din inegalitatea triunghiului si din (1) avem:

$||\frac{1}{2^{m(k+p)}} x_{k+p} - \frac{1}{2^{mk}} x_k|| \leq$

$\leq ||\frac{1}{2^{m(k+p)}} x_{k+p} - \frac{1}{2^{m(k+p-1)}} x_{k+p-1}|| + ||\frac{1}{2^{m(k+p-1)}} x_{k+p-1} - \frac{1}{2^{m(k+p-2)}} x_{k+p-2}|| + ...+$

$+||\frac{1}{2^{m(k+1)}} x_{k+1} - \frac{1}{2^{mk}} x_k|| \leq \frac{1}{2^{m(k+p)}} \alpha_{k+p-1} + \frac{1}{2^{m(k+p-1)}} \alpha_{k+p-2} + ... + \frac{1}{2^{m(k+1)}} \alpha_k,$

de unde

$$||\frac{1}{2^{m(k+p)}} x_{k+p} - \frac{1}{2^{mk}} x_k|| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^{m(n+1)}} \alpha_n \qquad (2)$$

Din (i) rezulta ca restul de ordin n al seriei tinde la zero:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^{m(n+1)}} \alpha_n = 0,$$

prin urmare din (2) rezulta ca $(\frac{1}{2^{mk}} x_k)_{k\geq 0}$ este un sir Cauchy. Fie x limita sa. Atunci, pentru $p \to \infty$ in (2) obtinem:

$$||x - \frac{1}{2^{mk}} x_k|| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^{m(n+1)}} \alpha_n, k \in \mathbf{IN},$$

de unde pentru $k = 0$:

$$||x - x_0|| \leq \beta.$$

Exercitiul 21*.**(**un rezultat de stabilitate**)**. Fie $(G,+)$ un grup abelian, $(B, ||\cdot||)$ un spatiu Banach, si $n \in \mathbf{IN}^*$.Notam cu $A_n(G,B)$ functiile simetrice n-aditiva $a : G^n \to B$; i.e.

$a(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = a(x_1, ..., x_n), x_1, ..., x_n \in G, \forall \sigma : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$

$a(x_1, ..., x_{n-1}, x_n + x_{n+1}) = a(x_1, ..., x_n) + a(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}) \forall x_1, ..., x_n, x_{n+1} \in G$

Demonstrati ca daca $g : G^n \to B$ este o functie simetrica aproximativa n-aditiva, i.e. exista o constanta $M > 0$ astfel incat:

(i) $||g(x_1, ..., x_{n-1}, x_n + x_{n+1}) - g(x_1, ..., x_n) - g(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1})|| \leq M$, penru toti $x_1, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1} \in G$, atunci exista o functie unica n-aditiva $a \in A_n(G,B)$ astfel incat:

$||g(x_1, ..., x_n) - a(x_1, ..., x_n)|| \leq M, \forall x_1, ..., x_{n-1}, x_n \in G,$

si

$a(x_1, ..., x_n) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2^{nk}} g(2^k x_1, ..., 2^k x_n)$ penru toti $x_1, ..., x_{n-1}, x_n \in G$.

Solutie. Fie $x_1, ..., x_{n-1}, x_n \in G$.Folosind inegalitatea triunghiului avem:

$||g(2x_1,...,2x_n) - 2^n g(x_1,...,x_n)|| =$
$= ||[g(2x_1,...,2x_n) - 2g(2x_1,...,2x_{n-1},x_n)] + 2[2g(2x_1,...,2x_{n-1},x_n) -$
$-2g(2x_1,...,2x_{n-2},x_{n-1},x_n)] + ... + 2^{n-2}[g(2x_1,...,x_n) - 2g(x_1,...,x_n)]|| \le$
$\le ||g(2x_1,...,2x_n) - 2g(2x_1,...,2x_{n-1},x_n)|| + 2||g(2x_1,...,2x_{n-1},x_n) -$
$-g(2x_1,...,2x_{n-2},x_{n-1},x_n)|| + ... + 2^{n-1}||g(2x_1,...,x_n) - 2g(x_1,...,x_n)||$
si din (i) notand $y = (x_1,...,x_n)$, avem:

$$||g(2y) - 2^n g(y)|| \le M(1+2+...+2^{n-1}) = (2^n - 1)M \quad (1)$$

Inlocuind y cu $2^k y$ in (1) obtinem:

$$||g(2^{k+1}y) - 2^n g(2^k y)|| \le M, \forall k \in \mathbf{IN} \qquad (2)$$

Acum, folosind Exercitiul 20. pentru $x_k = g(2^k y), m = n$, si $\alpha_k = M(2^n - 1)$ avem:

$\beta = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n(k+1)}} \cdot M(2^n - 1) = M(2^n - 1)\frac{1}{2^n}\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = M$, sirul $(\frac{1}{2^{nk}} g(2^k x_1,...,2^k x_n))_{k \ge 0}$ este convergent si limita sa este:

$$a(x_1,...,x_n) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{nk}} g(2^k x_1,...,2^k x_n) \qquad (3)$$

verifica inegalitatea:

$$||g(x_1,...,x_n) - a(x_1,...,x_n)|| \le M \qquad (4)$$

deoarece x_0 este aici $g(x_1,...,x_n)$.

Pentru a demonstra ca $a \in A_n(G,B)$ inlocuim $x_1,...,x_n,x_{n+1}$ cu $2^k x_1,...,2^k x_n, 2^k x_{n+1}$ in (i) si inmultim cu $\frac{1}{2^{nk}}$; prin urmare vom avea:

$$||\frac{1}{2^{nk}} g(2^k x_1,...,2^k x_n, 2^k(x_n + x_{n+1})) - \frac{1}{2^{nk}} g(2^k x_1,...,2^k x_n) -$$
$$-\frac{1}{2^{nk}} g(2^k x_1,...,2^k x_n, 2^k x_{n+1})|| \le \frac{1}{2^{nk}}, k \in \mathbf{IN} \qquad (5)$$

Acum, prin definitia (3) obtinem pentru $k \to \infty$ in (5):

$$||a(x_1,...,x_{n-1},x_n + x_{n+1}) = a(x_1,...,x_n) + a(x_1,...,x_{n-1},x_{n+1})|| = 0,$$

sau echivalent:

$$a(x_1,...,x_{n-1},x_n + x_{n+1}) = a(x_1,...,x_n) + a(x_1,...,x_{n-1},x_{n+1}),$$

si demonstram ca $a \in A_n(G,B)$.

Ramane doar sa demonstram ca a este singura functie simetrica n-aditiva ce verifica (4). Presupunem ca $b \in A_n(G,B)$ verifica (4) i.e.:

$$||g(x_1,...,x_n) - b(x_1,...,x_n)|| \le M, \forall x_1,...,x_{n-1},x_n \in G \qquad (6)$$

Inmultind (6) cu $\frac{1}{2^{nk}}$ si inlocuind x cu $2^k x_i, i = 1,2,...,n$ avem:

$||\frac{1}{2^{nk}} g(2^k x_1,...,2^k x_n) - b(x_1,...,x_n)|| \le \frac{1}{2^{nk}} M$, si pentru $k \to \infty$:

$$||a(x_1,...,x_n) - b(x_1,...,x_n)|| \le 0,$$

Prin urmare $a = b$, de aici rezulta ca a este unica functie simetrica n-aditiva care verifica (4).

6. EXERCITII

Exercitiul 1. Fie $\mathbf{IR}^p$ spatiul Euclidian si $A \subseteq \mathbf{IR}^p$.

Determinati seturile $\bar{A}, A', Is\ A, \overset{\circ}{A}, Fr\ A$.

(a) $A = (-1,1] \cup \{(\frac{1-n}{n})^n | n \in \mathbf{IN}^*\}$

(b) $A = \{x \in \mathbf{IR} | x^{2009} + x^{2008} = 1\}$

(c) $A = \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x > 0, x^2 + (y-1)^2 \le 1\} \cup \{(-1,1)\}$

(d) $A = S((0,0,0),1) \cup \{(x,y,z) \in \mathbf{IR}^3 | z \ge 1\}$

Raspunsuri.(a) $\bar{A} = [-1,1] \cup \{(\frac{1-n}{n})^n | n \in \mathbf{IN}^*\} \cup \{\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\}$,
$A' = [-1,1] \cup \{\frac{-1}{e}, \frac{1}{e}\}, Is\ A = \{(\frac{1-n}{n})^n | n \in \mathbf{IN}^*\}$,
$\overset{\circ}{A} = (-1,1)$, $Fr\ A = \{-1,1\} \cup \{(\frac{1-n}{n})^n | n \in \mathbf{IN}^*\}$.
(b)$\bar{A} = A$; $A' = \overset{\circ}{A} = \phi$; $Is\ A = Fr\ A = A$.
(c)$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x \geq 0, x^2 + (y-1)^2 \leq 1\} \cup \{(-1,1)\}$,
$A' = \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x \geq 0, x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, $Is\ A = \{(-1,1)\}$
$\overset{\circ}{A} = \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x \geq 0, x^2 + (y-1)^2 < 1\}$
$Fr\ A = \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 | x \geq 0, x^2 + (y-1)^2 = 1\}$.
(d) $\bar{A} = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \cup \{(x,y,z) | z \geq 1\} = A'$,
$Is\ A = \phi$, $\overset{\circ}{A}\{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \cup \{(x,y,z) | z > 1\}$,
$Fr\ A\{(x,y,z) \in \mathbf{IR}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x,y,1) | x,y \in \mathbf{IR}\}$

Exercitiul 2. Aratati ca $([\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], d)$ este un spatiu metric unde $d(x,y) := |\sin(x-y)|$; apoi calculati:
$d(0, -\frac{\pi}{2}), d(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}), d(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}), d(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}), d(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}), d(\frac{\pi}{12}, 0), d(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4})$.
Rarpunsuri.
$d(0, -\frac{\pi}{2}) = 1, d(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, d(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}, d(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$d(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1}, d(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}, d(\frac{\pi}{12}, 0) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercitiul 3. Fie $A \subset X$, unde (X,d) este un spatiu metric.
Demonstrati:
(a) $A \subset \overset{\circ}{A} \subset \bar{A}$; (b) $A' \subset \bar{A}$; (c) $Int(IntA) = IntA$;
(d) $Is\ A = A - A'$
(e) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$; (f) $A' \cap Is(A) = \phi$; (g) $C(Int\ A) = \bar{C(A)}$;
(h) $Ext\ A \cup \bar{A} = X$
(i) $Int\ A \cup Ext\ A \cup Fr\ A = X$; (j) $Fr\ A = Fr\ C(A) = \bar{A} \cap \bar{C(A)}$;
(k) $Int\ A \cap\ Fr\ A = \phi = Ext\ A \cap Fr\ A$;
(l) $\bar{A} = Int\ A \cup Fr\ A = A' \cup Is\ A = A \cup A'$.

Exercitiul 4. Fie $A, B \subset X$, unde (X,d) este un spatiu metric. Aratati ca:
(a) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$; (b) $\exists A, B$ a.i. $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$;
(c) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
(d) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$; (e) $Int(A \cap B) = Int\ A \cap Int\ B$;
(f) $Int\ A \cup Int\ B \subset Int(A \cup B)$;
(g) $\exists A, B$ a.i.$Int\ A \cup Int\ B \neq Int(A \cup B)$; (h) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$;
(i) $(A \cup B)' = A' \cup B'$; (j) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$;
(k) $\exists A, B$ a.i.$(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.

Exercitiul 5. Fie (X,d) un spatiu metric si $f : X \to Y$ o functie bijectiva. Aratati ca (Y, δ) este un spatiu metric, unde

$d(y_1, y_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$, pentru toti $y_1, y_2 \in Y$.

Exercitiul 6. Demonstrati ca (X, d) este un spatiu metric unde

$X = [-\infty, \infty], d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, si $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{1+|x|}, x \in \textbf{IR} \\ 1, x = \infty \\ -1, x = -\infty \end{array} \right\}$

Calculati $d(0, 1), d(1, 13), d(0, \infty), d(1, \infty), d(\infty, -\infty), \lim\limits_{n\to\infty} n$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ (n $\in$ **IN***).

Raspunsuri.

$d(0, 1) = \frac{1}{2}, d(1, 13) = \frac{3}{7}, d(0, \infty) = 1, d(1, \infty) = \frac{1}{2}, d(\infty, -\infty) = 2$

$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exercitiul 7. Fie (X, d) un spatiu metric si $k \in [0, \infty)$.

Demonstrati ca (X, δ) este de asemenea un spatiu metric, unde

$\delta(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+k\cdot d(x,y)}$, pentru toti $x, y \in X$. Demonstrati implicarea:

(X, d) este un spatiu metric complet $\Rightarrow (X, \delta)$ este complet.

Este adevarata afirmatia?

Exercitiul 8. Demonstati ca $(C^0[a, b], ||\cdot||)$ este un spatiu norma, unde

$|| \ f \ || = \int\limits_a^b \frac{f(x)}{1+|f(x)|} dx.$

Aratati ca $S(0, b - a) = C^0[a, b]$ si calculati $|| \ f \ ||$ pentru $f \in C[0, \frac{\pi}{2}]$,

$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \cos x, x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right\}$

Exercitiul 9. Fie f :**IR**^{2} $\rightarrow$**IR**^{2}, $f(x, y) = (y, x)$.Determinati $Fix(f")$ unde $n \in$**IN***.

Exercitiul 10. Fie f :**IR**$\rightarrow$**IR**, $f(x) = ax + b$, unde $a \neq 0, a, b \in$**IR.** Gasiti $Fix(f), Fix(f^2)$ si $Fix(f^3)$; daca $k \in$ **IN*** fixat, gasiti $a, b \in$**IR** astfel incat $Fix(f^k) =$**IR.**

Exercitiul 11*. Fie f :X $\rightarrow$ X o functie. Aratati ca:

(a) $Fix(f) \subset \bigcap\limits_{n\in \textbf{IN}^*} f^n(x)$.

(b) Daca $\bigcap\limits_{n\in \textbf{IN}^*} f^n(x) = \{x\}$ atunci $Fix(f) = \{x\}$.

(c) $Fix(f) \subset \bigcap\limits_{n\geq 2} Fix(f^n)$.

Exercitiul 12*. Fie (X, d) un spatiu metric si f :X $\rightarrow$ X o functie continua (i.e. pentru toti $x \in X$ pentru toti $\varepsilon > 0$ exista $\delta(\varepsilon, x) > 0$ astfel incat $d(f(x), f(y)) < \varepsilon, \forall y \in X, d(x, f(x)) < \delta(\varepsilon, x))$

Presupunem ca:

$\exists \alpha \in (0, 1) : d(f(x), f^2(x)) \leq \alpha d(x, f(x)), \forall x \in X.$

Demonstrati ca:

(a) $(f^n(x_0))_{n\geq 1}$ este un sir Cauchy, pentru toti $x_0 \in X$.

(b) Daca (X,d) este complet atunci $Fix(f) \neq \phi$

Exercitiul 13*. Demonstrati ca un spatiu linear norma $(V, ||\cdot||)$ in care regula paralelogramului este un spatiu produs interior (i.e. $\exists <,>$ produsul interior pe V astfel incat $||x|| = \sqrt{<x,x>}$).

Exercitiul 14. Folosind teorema lui Banach gasiti radacina reala a urmatoarelor ecuatii pana in 10^{-3}:

(a) $x^3 + 10x = 1$;

(b) $13x = \sin x + 1$;

(c) $x^5 + x = 13$.

Exercitiul 15. Aratati ca:

(a) $(\mathbf{IR}^p, ||\cdot||), ||x_1, ..., x_p|| = \max(|x_1|, ..., |x_p|)$ este un spatiu norma $(p \in \mathbf{IN}^*)$.

(b) $\nexists < \cdot, \cdot >$:$\mathbf{IR}^p\mathbf{x}\mathbf{IR}^p \to$**IR-** produs inner astfel incat

$|| \ x \ || = \sqrt{<x,x>}, \forall x \in \mathbf{IR}^p$.

Exercitiul 16. Demonstrati ca $(\mathbf{IR}, d)$,unde :

$d(x,y) = \arctan x - \arctan y|, x, y \in \mathbf{IR}$ este un spatiu metric, dat nu un spatiu metric complet.

Exercitiul 17. Demonstrati ca $(C, |\cdot|)$ este un spatiu Banach(unde C este setul numerelor complexe).

Exercitiul 18.** Fie $(V, ||\cdot||)$ un spatiu norma, $(B, ||\cdot||)$ un spatiu Banach, $p \in (0,\infty) - \{1\}, n \in \mathbf{IN}^*$ si $g : V^n \to B$ este o functie simetrica astfel incat:

$||g(x_1, ..., x_{n-1}, x_n + x_{n+1}) - g(x_1, ..., x_n) - g(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1})|| \leq$
$\leq || \ x_1 \ ||^p || \ x_2 \ ||^p ... || \ x_{n-1} \ ||^p (||x_n||^p + ||x_{n+1}||^p)$ pentru toti $x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in V$.Demonstrati ca exista un unic $a \in A_n(V, B)$ astfel incat

$||g(x_1, ..., x_n) - a(x_1, ..., x_n)|| \leq \frac{2}{|2^p - 2|} || \ x_1 \ ||^p || \ x_2 \ ||^p ... || \ x_n \ ||^p$,

pentru toti $x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in V^n$. De asemenea aratati ca:

$m(x) = a(x_1, ..., x_n), x \in V$ este unica functie ce verifica:

$\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k m(x + ky) = n! m(y), \forall x, y \in V$

si

$||m(x) - g(x_1, ..., x_n)|| \leq \frac{2}{|2^p - 2|} \cdot || \ x \ ||^{np}$

LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE

În acest capitol vom defini noțiunile de limită într-un punct şi continuitate pentru funcțiile de mai multe variabile (funcții de forma $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$) ca generalizări naturale ale noțiunilor similare studiate în liceu. Menționăm că majoritatea rezultatelor expuse rămân valabile în contextul mai larg al spațiilor vectoriale normate, ori al spațiilor metrice, dar că lectura acestor rezultate se poate face independent de cea a capitolului „Spații metrice” .

A. LIMITE DE ŞIRURI

Fie p şi q $\in \mathbb{N}^*$.

Definiția 1. Fie $m \in \mathbb{N}$ şi $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$. O funcție $f : M \to \mathbb{R}^p$ se numeşte *şir de puncte* (vectori) din $\mathbb{R}^p$. Vom identifica şirul f cu imaginea sa ; deci, dacă: $f(n) = x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots , x_n^p) \in \mathbb{R}^p$, $n \in M$, vom spune că $(x_n)_{n\geq m}$, sau (x_n) este un şir de puncte din $\mathbb{R}^p$. Elementul $x_n \in \mathbb{R}^p$, ($n \geq m$) se numeşte *termenul general, sau termenul de rang n* al şirului (x_n). Şirurile de numere reale (x_n^k), $k \in \{1,2,...,p\}$, se numesc *şirurile coordonatelo*r şirului (x_n). Luând $k_n \in M$ şi $k_n \geq n$,pentru orice $n \in M$, atunci şirul $(x_{k_n})_{n\geq m}$ se numeşte *subşir* al şirului (x_n) şi vom folosi notația $(x_{k_n}) \subset (x_n)$. Dacă (x_n) este un şir de puncte din $\mathbb{R}^p$ vom scrie $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$; dacă $x_n = a \in \mathbb{R}^p$ pentru orice $n \in M$ şirul (x_n)se numeşte *şir staționar* sau *constant*.

Observație. Fie $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$. Cum (x_n^k), $k = \overline{1,p}$ sunt şiruri de numere reale, pentru aceste şiruri se pun probleme de convergență. Reamintim că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = x^k \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă :[$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left| x_n^k - x^k \right| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_k(\varepsilon)$] sau echivalent :[$\forall V_k$ o vecinătate a punctului x^k $\exists n_k \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n^k \in V_k$, $\forall$ $n \geq n_k$] .

Prin urmare, în definirea convergenței în $\mathbb{R}$ sunt esențiale noțiunile de *distanță* de la x_n^k la x^k (aici $\left| x_n^k - x^k \right|$) şi de *vecinătate* a punctului x^k. Vom generaliza cele două noțiuni în $\mathbb{R}^p$, ceea ce va permite definirea convergenței pentru şiruri din $\mathbb{R}^p$ şi vom sublinia legătura care există între această convergență şi convergența şirurilor coordonatelor.

Exemplul 1. Fie $x_n = (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$, $b_n = \dfrac{\cos n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi M_n punctul din plan având coordonatele a_n şi b_n. Desigur $a_n \to 0$ şi $b_n \to 0$ $(n\to\infty)$ în $\mathbb{R}$, deci ar fi natural să definim convergența în $\mathbb{R}^2$ de aşa manieră ca $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n,b_n) = (0,0)$.

Pe de altă parte dacă O(0,0) este originea din plan, atunci $d(M_n,O) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} == \dfrac{1}{n} \to 0$.

Această observație ne conduce la ideea de a defini convergența în $\mathbb{R}^2$ prin intermediul distanței:

$(a_n, b_n) \to (0,0) \Leftrightarrow d(M_n,O) \to 0 \ (n \to \infty)$.

Definim întâi „distanța” dintre două puncte în $\mathbb{R}^p$.

Definiția 2. Fie $x = (x^1,\dots, x^p)$, $y = (y^1,\dots, y^p) \in \mathbb{R}^p$.

Numărul real nenegativ:

$\| x \| = \sqrt{\sum_{k=1}^{p}\left(x^k\right)^2} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^p)^2}$ se numeşte *norma* elementului x, iar numărul:

$d(x,y) = \| x - y \| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^p - y^p)^2}$ se numeşte *distanța* de la x la y.

Observația 1. Funcția $\| \ \| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$, $x \to \| x \|$, verifică următoarele proprietăți:

N_1 : $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0 = (0,\dots,0) \in \mathbb{R}^p$

N_2 : $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^p$

N_3 : $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$.

Primele două proprietăți sunt imediate; pentru cea de a treia se foloseşte inegalitatea lui Minkowsky:

$\left(\sum_{k=1}^{p}|a_k + b_k|^s\right)^{1/s} \le \left(\sum_{k=1}^{p}|a_k|^s\right)^{1/s} + \left(\sum_{k=1}^{p}|b_k|^s\right)^{1/s}$, pentru orice $s \ge 1$ şi pentru orice $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,p}$.

O funcție care verifică proprietățile N_1, N_2 şi N_3 se numeşte *normă*.

Observația 2. Funcția $d: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$ definită prin $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ are următoarele proprietăți care rezultă imediat din cele ale normei:

M_1 : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M_2 : $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^p$

M_3 : $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^p$.

O funcție care verifică aceste proprietăți poartă numele de *metrică*. Metrica definită mai sus se numeşte *metrica euclidiană,* sau *metrica naturală* pe $\mathbb{R}^p$.

Definiția 3. Spunem că şirul $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ este *convergent* dacă şi numai dacă există $x \in \mathbb{R}^p$ astfel încât:

$[\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N : \| x_n - x \| < \varepsilon$, pentru orice $n \ge n(\varepsilon)]$.

Punctul $x \in \mathbb{R}^p$ se numeşte *limita* şirului (x_n) ; vom scrie : $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, sau $x_n \to x \ (n \to \infty)$; vom folosi şi sintagmele „şirul x_n converge la x”, ori „x_n tinde la x” (când $n \to \infty$).

Un şir care nu este convergent se numeşte *şir divergent*.

Exemplul 2. Fie $x_n = (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$, $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Desigur $a_n \to e$ şi $b_n \to 0$. Vom arăta că $x_n \to x = (e,0)$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $r(\varepsilon), s(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

astfel încât:

$$|a_n - e| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ \forall\ n \geq r(\varepsilon) \text{ şi } b_n < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ \forall\ n \geq s(\varepsilon).$$

Fie $n(\varepsilon)$ = max (r(ε), s(ε)). Atunci:

$$\|x_n - x\| = \sqrt{(a_n - e)^2 + b_n^{\ 2}} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq n(\varepsilon).$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Propoziția 1. Limita unui şir convergent este unică.

Demonstrație. Fie (x_n) un şir din I**R**^{p}. Să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Atunci pentru orice ε >0 există n (ε) ∈ I**N** astfel ca:

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ şi } \|x_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ n \geq n(\varepsilon), \text{ iar:}$$

$$\|x - y\| = \|x - x_n + x_n - y\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\|,$$

deci $\|x - y\| < \varepsilon$, pentru orice ε > 0; atunci $\|x - y\| = 0$, de unde, conform proprietății N_1, x = y.

Observații. 1. Proprietatea demonstrată justifică expresia „x este limita şirului (x_n)”.

2. Exact ca şi în I**R** modificarea numărului m∈ I**N** din definiția unui şir din I**R**^{p} (definiția 1) nu afectează convergența, ori limita (dacă există) şirului respectiv.

3. Legătura dintre convergența unui şir din I**R**^{p} şi convergența şirurilor coordonatelor sale (vezi şi exemplul 1) este stabilită în următoarea teoremă:

Teorema 1 *(teorema de convergență a şirurilor în* I**R**^{p}*)*. Un şir $(x_n) \subset$ I**R**^{p} este convergent dacă şi numai dacă şirurile coordonatelor sale sunt convergente. În acest caz:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^1, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_n^p\right),$$

unde $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^p)$.

Demonstrație. 1. Să presupunem că (x_n) este convergent. Atunci există x = $=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ∈ I**R**^{p}, unde $x=(x^1,\ldots,x^p)$. Fie ε>0; atunci există n(ε)∈I**N** astfel încât:

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \forall\ n \geq n(\varepsilon). \tag{1}$$

Dar, pentru orice $k \in \{1,2,\ldots,p\}$:

$$|x_n^k - x^k| \leq \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + \ldots + (x_n^p - x^p)^2} = \|x_n - x\|. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că: $|x_n^k - x^k| < \varepsilon$, ∀ n ≥ n(ε), k= $\overline{1,p}$, deci şirurile (x_n^k) sunt convergente şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = x^k$, k=$\overline{1,p}$.

2. Să presupunem acum că şirurile coordonatelor sunt convergente. Atunci există $x^k \in$ I**R** astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = x^k$, k=$\overline{1,p}$. Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = (x^1,\ldots,x^p)$.

Fie ε >0. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = x^k$, există $n_k(\varepsilon)$∈I**N** astfel încît:

$$\left|x_n^k - x^k\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}, \quad \forall\ n \geq n_k(\varepsilon),\ k=\overline{1,p}. \tag{3}$$

Fie $n(\varepsilon)= \max(n_1(\varepsilon),\ldots,n_p(\varepsilon))$. Atunci din (3) rezultă că pentru orice $n \geq n(\varepsilon)$:

$$\|x_n - x\| = \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + \ldots + (x_n^p - x^p)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p} + \ldots + \frac{\varepsilon^2}{p}} = \varepsilon,$$

deci (x_n) este un şir convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Propoziţia 2. Un şir $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ este convergent la $x \in \mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă orice subşir al său este convergent la x.

Demonstraţie. 1. Să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi că (x_{k_n}) este un subşir al şirului (x_n). Fie $\varepsilon>0$. Atunci există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|x_n - x\| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n(\varepsilon)$; dar $(x_{k_n}) \subset (x_n)$, deci:

$$\|x_{k_n} - x\| < \varepsilon,\ \forall\ n \geq n(\varepsilon)$$

adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x$.

2. Dacă orice subşir al şirului (x_n) converge la x cum $(x_n) \subset (x_n)$ rezultă că (x_n) converge la x.

Definiţia 4. Şirul $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ se numeşte *şir fundamental* (*şir Cauchy)* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât: $\|x_n - x_m\| < \varepsilon,\ \forall\ m,n \geq n(\varepsilon)$.

Observaţie. Noţiunea introdusă generalizează noţiunea similară studiată în $\mathbb{R}$. S-a văzut că în $\mathbb{R}$ un şir este fundamental dacă şi numai dacă el este convergent. Rezultatul are loc şi în $\mathbb{R}^p$.

Teorema 2. (*Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy*). Un şir de puncte din $\mathbb{R}^p$ este convergent dacă şi numai dacă el este şir fundamental.

Demonstraţie. 1. Presupunem că şirul $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ este convergent. Atunci există $x \in \mathbb{R}^p$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ n \geq n(\varepsilon). \tag{1}$$

Dar:

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\|. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că: $\|x_n - x_m\| < \varepsilon,\ \forall\ n,m \geq n(\varepsilon)$, adică (x_n) este un şir Cauchy.

2. Reciproc, presupunem că (x_n) este un şir fundamental. Deoarece $\left|x_n^k - x_m^k\right| \leq \|x_n - x_m\|,\ k = \overline{1,p}$, urmează că şirurile coordonatelor sunt de asemenea şiruri Cauchy în $\mathbb{R}$; prin urmare ele sunt convergente. În consecinţă, conform teoremei de convergenţă în $\mathbb{R}^p$, şirul (x_n) este convergent.

Definiţia 5. Şirul $(x_n)_{n \geq r} \subset \mathbb{R}^p$ este *mărginit* dacă există $M > 0$ astfel ca

$$\|x_n\| < M,$$

pentru orice $n \geq r$.

Propoziţia 3. Un şir convergent în $\mathbb{R}^p$ este mărginit.

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n \geq r} \subset \mathbb{R}^p$ şi $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există un rang $m \in \mathbb{N}$, $m > r$ astfel ca:

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \ \forall n \geq m. \tag{1}$$

Dar : $\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|$, deci din (1):

$$\|x_n\| \leq \varepsilon + \|x\|, \ \forall n \geq m. \tag{2}$$

Fie $M = \max(\|x_r\|, \|x_{r+1}\|, \ldots, \|x_{m-1}\|, \|x\| + \varepsilon)$. Atunci din (2) şi din definiția lui M rezultă că: $\|x_n\| \leq M$, $\forall n \geq r$, adică şirul (x_n) este mărginit.

Consecință. Orice şir fundamental din $\mathbb{R}^p$ este mărginit.

Observație. Şirul $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ este mărginit dacă şi numai dacă şirurile coordonatelor sale sunt mărginite. Această aserțiune se justifică imediat prin inegalitățile:

$$|x_n^k| \leq \|x_n\| \leq \sum_{k=1}^{p} |x_n^k| \quad k = \overline{1,p}.$$

Definiția 6. Fie $(x_n)_{n\geq m} \subset \mathbb{R}^p$. Şirul $(s_n)_{n\geq m} \subset \mathbb{R}^p$ unde $s_n = \sum\limits_{k=m}^{n} x_k$, $n \geq m$, se numeşte *serie* de elemente din $\mathbb{R}^p$ şi se notează: $\sum\limits_{n=m}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n\geq m} x_n$, sau $\sum x_n$. Elementul $s_n \in \mathbb{R}^p$ se numeşte *sumă parțială* de ordin n a seriei $\sum x_n$. Seria $\sum x_n$ este *convergentă* dacă şirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\geq m}$ este convergent; în caz contrar spunem că seria $\sum\limits_{n\geq m} x_n$ este *divergentă*.

Observația 1. Deoarece $s_n = (s_n^1, s_n^2, \ldots, s_n^p)$, unde $s_n^i = \sum\limits_{k=m}^{n} x_k^i$, $i = \overline{1,p}$, convergența seriei $\sum x_n$ se reduce, conform teoremei de convergență în $\mathbb{R}^p$, la convergența seriilor coordonatelor : $\sum\limits_{n\geq m} x_n^i$, $i = \overline{1,p}$.

Observația 2. S-a văzut că în $\mathbb{R}$ definirea convergenței se poate face în termeni de vecinătăți. Acelaşi lucru se poate realiza şi în $\mathbb{R}^p$.

Definiția 7. Fie $a \in \mathbb{R}^p$ şi $r > 0$. Mulțimea $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(a,x) < r\}$ se numeşte *sferă deschisă de centru a şi rază r*.

Exemplul 3. Pentru $p = 1$, $S(a,r) = (a - r, a + r)$. Dacă p=2 şi a=(b,c), atunci $S(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-b)^2+(y-c)^2 < r^2\}$, deci sfera de centru (b,c) şi rază r este interiorul cercului $C((b,c),r)$.

Definiția 8. O mulțime $V \subset \mathbb{R}^p$ se numeşte *vecinătate* a punctului $a \in \mathbb{R}^p$ dacă există $r > 0$ astfel ca $S(a,r) \subset V$. Vom nota cu $\mathcal{V}_a$ mulțimea vecinătăților punctului $a \in \mathbb{R}^p$. Pentru $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ definim, ca în liceu, mulțimea vecinătăților unui element $a \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel :

$\mathcal{V}_a = \{V \subset \mathbb{R} \mid \exists\, r>0: (a-r, a+r) \subset V\}$, dacă $a \in \mathbb{R}$

$\mathcal{V}_\infty = \{V \subset \mathbb{R} \mid \exists\, r>0: (r, \infty] \subset V\}$, dacă a = + ∞

$\mathcal{V}_{-\infty} = \{V \subset \mathrm{I}\mathbf{R} \mid \exists\, r > \mathrm{I}\mathbf{R}: [-\infty, r) \subset V\}$, dacă a = $-\infty$.

Propoziția 4. Şirul $(x_n) \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p$ este convergent dacă şi numai dacă există $x \in \mathrm{I}\mathbf{R}^p$ astfel încât pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_x$ există $m \in \mathrm{I}\mathbf{N}$ (care depinde de V) iar $x_n \in V$, pentru orice $n \geq m$.

Demonstrație. 1. Presupunem că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Fie $V \in \mathcal{V}_x$. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât :

$$S(x, \varepsilon) \subset V. \tag{1}$$

Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ există $m = n(\varepsilon) \in N$ astfel încât :

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \quad , \quad \forall\, n \geq m. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $x_n \in V$, $\forall\, n \geq m$.

2. Reciproc, presupunem că există $x \in \mathrm{I}\mathbf{R}^p$ astfel ca pentru orice $V \in \mathcal{V}_x$ există $m \in \mathrm{I}\mathbf{N}$ astfel ca :

$$x_n \in V,\ \forall\, n \geq m. \tag{3}$$

Arătăm că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci:

$$V = S(x, \varepsilon) \in \mathcal{V}_x. \tag{4}$$

Din (3) şi (4) rezultă că există $m \in \mathrm{I}\mathbf{N}$ astfel încât : $x_n \in S(x, \varepsilon), \forall\, n \geq m$, sau $\|x_n - x\| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq m$. Prin urmare $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Definiția 9. Şirul $(x_n) \subset \mathrm{I}\mathbf{R}$ *are limita* ∞ $(-\infty)$, sau *converge* la ∞ $(-\infty)$ în $\overline{\mathrm{I}\mathbf{R}}$ dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}_\infty$ $(V \in \mathcal{V}_{-\infty})$ există $m \in \mathrm{I}\mathbf{N}$ astfel încât $x_n \in V$, $\forall\, n \geq m$.

Observație. Şirul $(x_n) \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p(\overline{\mathrm{I}\mathbf{R}})$ converge la $x \in \mathrm{I}\mathbf{R}^p(\overline{\mathrm{I}\mathbf{R}})$ dacă şi numai dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}_x$, în afara vecinătății V există cel mult un număr finit de termeni ai şirului.

Definiția 10. Punctul $x \in \mathrm{I}\mathbf{R}^p(\overline{\mathrm{I}\mathbf{R}})$se numeşte *punct limită* pentru şirul $(x_n) \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p(\overline{\mathrm{I}\mathbf{R}})$ dacă :

$[\forall\, V \in \mathcal{V}_x, \forall m \in \mathrm{I}\mathbf{N}, \exists\, n \geq m, n \in \mathrm{I}\mathbf{N}$ a.î. $x_n \in V]$.

Observație. x este un punct limită pentru şirul (x_n) dacă şi numai dacă în orice vecinătate a punctului x există o infinitate de termeni ai şirului.

Exmplul 4. Mulțimea punctelor limită a şirului $(\sin\frac{n\pi}{2}, \cos n\pi) \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^2$ este $\{(0,1), (1,-1), (-1,-1)\}$.

Exemplul 5. Şirul $(n)_{n\geq1} \subset \mathrm{I}\mathbf{R}$ nu are nici un punct limită în $\mathrm{I}\mathbf{R}$, dar are ca unic punct limită în $\overline{\mathrm{I}\mathbf{R}}$ pe $x = \infty$.

Observație. Punctele limită ale unui şir se pot caracteriza cu ajutorul subşirurilor astfel :

Teorema 3. Punctul $x \in \mathrm{I}\mathbf{R}^p(\overline{\mathrm{I}\mathbf{R}})$ este punct limită pentru şirul $(x_n) \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p(\overline{\mathrm{I}\mathbf{R}})$ dacă şi numai dacă există un subşir $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ convergent la x.

Demonstrație. 1. Presupunem că există $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ astfel ca $x_{k_n} \to x\ (n \to \infty)$. Atunci pentru orice $V \in \mathcal{V}_x$ există $m \in \mathrm{I}\mathbf{N}$ astfel încât $x_{k_n} \in V$, pentru orice $k_n \geq m$ (Propoziția 4). Deci x este un punct limită pentru şirul (x_n).

2. Reciproc, dacă x este punct limită pentru şirul $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, luând $U_n = S\left(x, \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{V}_x$ există $x_{k_n} \in U_n$, unde $k_n \geq n$. Fie $\varepsilon > 0$ şi $m = [1/\varepsilon] + 1$. Atunci $\left\| x_{k_n} - x \right\| < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq m$, deci $x_{k_n} \to x$.

Dacă $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ şi $x = \infty$ $(x = -\infty)$ atunci pentru $U_n = (n, \infty] \in \mathcal{V}_\infty$ (respectiv $U_n = [-\infty, -n) \in \mathcal{V}_{-\infty}$) există $x_{k_n} \in U_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$; prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \infty$ (respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = -\infty$).

Observație. Noțiunea de punct limită al unui şir din $\mathbb{R}^p$ este o generalizare a noțiunii de punct limită studiată în liceu (p = 1). Exemplul 5 indică existența unor şiruri care nu posedă puncte limită. Pentru p = 1, lema lui Cesaro ("orice şir mărginit din $\mathbb{R}$ are puncte limită") oferă condiții suficiente pentru ca mulțimea punctelor limită ale unui şir $(x_n) \subset \mathbb{R}$ să fie nevidă. Rezultatul este valabil şi în $\mathbb{R}^p$.

Teorema 4(*Cesaro*). Orice şir mărginit din $\mathbb{R}^p$ are cel puțin un punct limită.

Demonstrație. Fie $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ un şir mărginit. Conform observației de la Propoziția 3, şirurile coordonatelor $(x^i_n) \subset \mathbb{R}, i = \overline{1,p}$ sunt şi ele mărginite şi de asemenea toate subşirurile lor. Aplicăm lema lui Cesaro şirului $(x^1_n) \subset \mathbb{R}$; atunci $\exists (x^1_{k^1_n}) \subset (x^1_n)$ şi $x^1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x^1_{k^1_n} = x^1$. Subşirul $(x^2_{k^1_n}) \subset (x^2_n)$ este mărginit, deci, din lema lui Cesaro: $\exists (x^2_{k^2_n}) \subset (x^2_{k^1_n})$ şi $x^2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x^2_{k^2_n} = x^2$. Repetând acest procedeu obținem în cele din urmă: $\exists (x^p_{k^p_n}) \subset (x^p_{k^{p-1}_n})$ şi $x^p \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x^p_{k^p_n} = x^p$. Am format astfel subşirul $(x_{k^p_n}) \subset (x_n)$ pentru care: $(x^s_{k^p_n}) \subset (x^s_{k^s_n}) \subset (x^s_n)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x^s_{k^p_n} = x^s$, $s = \overline{1,p}$.

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k^p_n} = x = (x^1, ..., x^p)$.

Consecință. Orice şir mărginit din $\mathbb{R}^p$ are un subşir convergent.

Observație. Propoziția 3 afirmă că mărginirea este o condiție necesară pentru convergența unui şir în $\mathbb{R}^p$. O condiție necesară şi suficientă de convergență este dată de :

Teorema 5. Fie (x_n) un şir mărginit de puncte din $\mathbb{R}^p$. Condiția necesară şi suficientă ca (x_n) să fie convergent este ca el să aibă un unic punct limită.

Demonstrație. ***Necesitatea*** rezultă din unicitatea limitei şi din Propoziția 4.

Suficiența. Fie $x \in \mathbb{R}^p$ unicul punct limită al şirului mărginit (x_n). Vom demonstra că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ prin reducere la absurd. Presupunem deci că şirul (x_n) nu converge la x. Atunci: [$\exists V \in \mathcal{V}_x$ astfel încât $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $k_n \in \mathbb{N}$: $k_n \geq n$: $x_{k_n} \notin V$]. Dar (x_{k_n}) este mărginit , deci, în acord cu Teorema lui Cesaro, are un punct limită $y \neq x$, care este de asemenea punct limită pentru şirul (x_n); contradicție! În consecință, presupunerea că şirul (x_n) nu converge la x a fost falsă, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Definiția 11. Un punct $a\in$ $I\!R^p(\overline{I\!R})$ este *punct de acumulare* al mulțimii $A\subset I\!R^p(\overline{I\!R})$ dacă :$\forall$ $V\in\mathcal{V}_a$: $V\cap A\setminus\{a\}\neq\emptyset$. Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii A (posibil vidă) se notează cu A' şi se numeşte *mulțimea derivată* (a mulțimii A).

Observația 1. Din definiția vecinătăților rezultă că $a\in A'\subset I\!R^p$ dacă şi numai dacă : $\forall\, r>0\;\; S(a,r)\cap A\setminus\{a\}\neq\phi$, ceea ce este echivalent cu : $\forall\, r>0\;\exists\, x\in A\setminus\{a\}$ astfel încât $\|x-a\|<r$.

Observația 2. Noțiunea de punct de acumulare este o generalizare a celei similare studiate în liceu.

Exemplul 6. Dacă $A = S((0,0),1)\subset I\!R^2$, atunci :

$A'=\{(x,y)\in \mathbf{I\!R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$,deci $A'=A\cup C((0,0),1)$.

Propoziția 5. Fie $A\subset I\!R^p$. Atunci :

$$a\in A'\Leftrightarrow\left[\exists\,(x_n)\subset A\setminus\{a\}\text{astfel încât}\lim_{n\to\infty}x_n=a\right].$$

Demonstrație. 1. Fie $a\in A'$. Din definiția punctului de acumulare rezultă că:

$$\forall\, n\in \mathbf{I\!N}^*\;\exists\, x_n\in S\left(a,\frac{1}{n}\right)\cap A\setminus\{a\}\,. \qquad (1)$$

Fie $\varepsilon>0$ şi $m=[1/\varepsilon]+1$. Atunci, din (1) obținem :$\|x_n-a\|<\dfrac{1}{n}<\varepsilon\,,\forall\, n\ge m\,,$

ceea ce dovedeşte convergența şirului (x_n) la x.

2. Presupunem că $(x_n)\subset A\setminus\{a\}$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Fie $V\in\mathcal{V}_a$; atunci există $m\in I\!N$ astfel încât :$x_n\in A\cap V\setminus\{a\},\forall\, n\ge m$, deci $V\cap A\setminus\{a\}\neq\phi$. Prin urmare $a\in A'$.

Exemplul 7. Fie $A=(0,1]\times(0,1]\subset \mathbf{I\!R}^2$.Vom arăta că $A'=[0,1]\times[0,1]$.

1. Arătăm că $A'\subset[0,1]\times[0,1]$ ceea ce este echivalent cu afirmația :

$[(a,b)\notin[0,1]\times[0,1]\Rightarrow(a,b)\notin A']$.

Fie deci $(a,b)\notin[0,1]\times[0,1]$. Presupunem, prin absurd că $(a, b)\in A'$. Conform propoziției 5 există $(a_n,b_n)\in(0,1]\times(0,1]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n,b_n)=(a,b)$. Dar $a_n\in(0,1],b_n\in(0,1]$, deci $a\in[0,1]$ şi $b\in[0,1]$; contradicție! Prin urmare $(a,b)\notin A'$.

2. Arătăm că $[0,1]\times[0,1]\subset A'$. Fie $(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$. Construim şirul $(x_n,y_n)\subset(0,1]\times(0,1]$ astfel :

$x_n=\dfrac{1}{n}$, pentru a = 0 , $n\in I\!N^*$,

$x_n=a-\dfrac{1}{n}$, pentru $a\in(0, 1)$, $n\ge\dfrac{1}{a}$,

$x_n=1-\dfrac{1}{n}$, pentru a = 1 , $n\ge 2$.

Analog se construieşte (y_n). Atunci $(x_n, y_n) \to (a, b)$ şi conform propoziției 5, $(a, b) \in A'$.

Definiția 12. Mulțimea $A \subset \mathbf{IR}^p$ este *mărginită* dacă există $a \in \mathbf{IR}^p$ şi $r>0$ astfel ca $A \subset S(a, r)$.

Propoziția 6. Mulțimea $A \subset \mathbf{IR}^p$ este mărginită dacă şi numai dacă $[\exists M > 0$ a.î. $\|x\| \leq M, \forall x \in A]$.

Demonstrație. 1. Presupunem că A este mărginită. Din definiția 12 rezultă că : $\exists a \in \mathbf{IR}^p$ şi $r > 0$ a.î. $A \subset S(a, r)$ deci $\|x - a\| < r, \forall x \in A$; atunci :

$$\|x\| = \|x - a + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| < r + \|a\| = M.$$

2. Reciproc, dacă există $M > 0$ astfel ca $\|x\| \leq M, \forall x \in A$ atunci $A \subset S(0, r)$ unde $r = M + 1$, deci A este mărginită.

Teorema 6 (*Bolzano-Weierstrass*). Orice mulțime infinită şi mărginită din $\mathbf{IR}^p$ are cel puțin un punct de acumulare.

Demonstrație. Fie $A \subset \mathbf{IR}^p$ o mulțime infinită şi mărginită. Conform propoziției 6 există $M > 0$ astfel încât:

$$\|x\| \leq M, \forall x \in A \tag{1}$$

Dar A este o mulțime infinită, deci există un şir $(x_n)_{n \geq 0} \subset A$ cu toți termenii distincți; din (1) rezultă că :

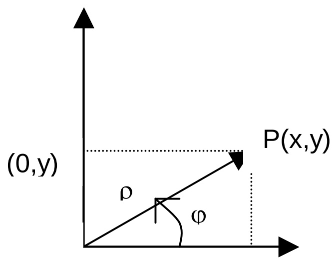
$$\|x_n\| \leq M, \forall n \in \mathbf{IN}$$

deci şirul (x_n) este mărginit. Conform Teoremei lui Cesaro există un subşir $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ convergent. Fie $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n}$. Din propoziția 5 rezultă că $x \in A'$.

B. FUNCȚII VECTORIALE

Definiția 13. O funcție f: $A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ $(p, q \in \mathbf{IN}^*)$ se numeşte *funcție (aplicație) vectorială de argument vectorial.* Deci pentru orice $x \in A$ există un unic $y = (y^1, ..., y^q) \in \mathbf{IR}^q$ astfel încât $f(x) = y$. Funcțiile reale de argument vectorial definite prin : f_k: $A \to \mathbf{IR}$, $f_k(x) = y^k, k = \overline{1,q}$ se numesc *componente scalare* ale funcției f. Vom scrie $f = (f_1, \ldots, f_q)$. Mai spunem că f este o *funcție de p variabile*. Mulțimea $\{(x, f(x)) \subset \mathbf{IR}^p \times \mathbf{IR}^q \mid x \in A\}$ se numeşte *graficul* funcției f.

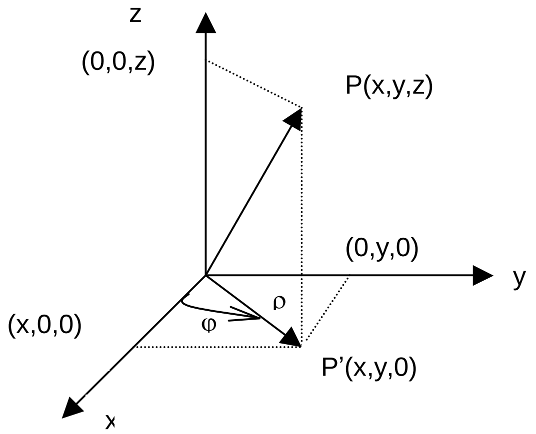
Exemplul 8. Funcția $f : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbf{IR}^2$ definită prin $f(\rho,\varphi) = (x,y)$, unde $x = \rho \cos \varphi$ şi $y = \rho \sin \varphi$ are componentele scalare definite prin: $f_1(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$, $f_2(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$, pentru orice $(\rho, \varphi) \in [0,\infty) \times [0,2\pi)$.



Desigur pentru orice (x,y) $\in$ I**R**^{2} luând $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = d(0, P)$ unde O(0,0) , P(x, y), iar φ unghiul dintre semiaxa Ox şi vectorul $\overline{OP}$ rezultă că $f(\rho, \varphi) = (x, y)$.

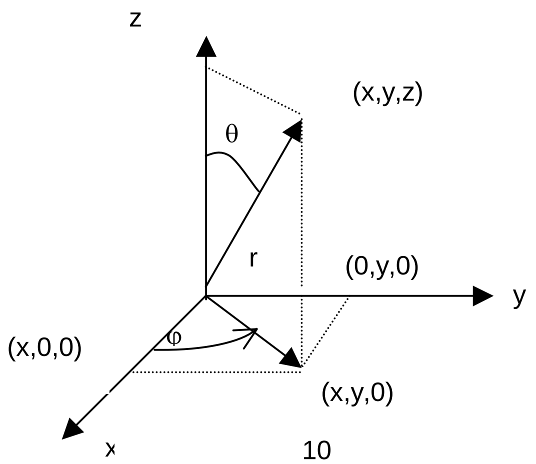
Numerele $\rho \in [0, \infty)$ şi $\varphi \in [0, 2\pi)$ se numesc *coordonatele polare* ale punctului P de coordonate carteziene $x = \rho \cos\varphi$ şi $y = \rho \sin\varphi$. Desigur f este bijectivă, iar $f^{-1} : R^2 \to [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ este definită prin $f^{-1}(x, y) = (\rho, \varphi)$ unde ρ şi φ sunt coordonatele polare ale punctului P(x, y).

Exemplul 9. Funcţia $f = (f_1, f_2, f_3) : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}^3$ definită prin $f_1(\rho, \varphi, z) = \rho\cos\varphi$, $f_2(\rho, \varphi, z) = \rho\sin\varphi$ şi $f_3(\rho, \varphi, z) = z$ este o funcţie bijectivă.



Dacă (x, y, z) $\in$ I**R**^{3} definim $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi φ - unghiul făcut de semiaxa Ox şi vectorul $\overline{OP'}$, unde $P'(x, y, 0)$ este proiecţia lui P(x, y, z) în planul xOy ; atunci : (g_1, g_2, g_3) : I**R**^{3} $\to [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times$ I**R** definită prin: $g_1(x, y, z) = \rho$, $g_2(x, y, z) = \varphi$, $g_3(x, y, z) = z$ este inversa funcţiei f; numerele ρ, φ şi z se numesc *coordonatele cilindrice* ale punctului P(x, y, z).

Exemplul 10 . Fie $(x, y, z) \in$ I**R**^{3} , şi $P'(x, y, 0)$ proiecţia lui P(x,y,z) în planul xOy. Numerele $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = d(O, P)$, φ -unghiul făcut de semiaxa Ox cu vectorul $\overline{OP'}$ şi θ - unghiul făcut de semiaxa Oz cu vectorul $\overline{OP}$ se numesc *coordonatele sferice* ale punctului P(x, y, z).

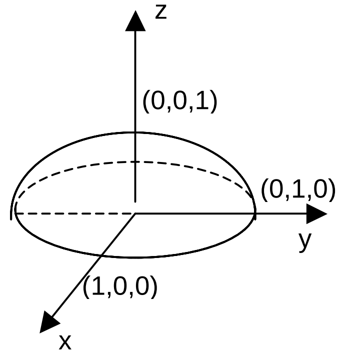


Se verifică egalitățile: $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, egalități ce definesc funcția vectorială bijectivă de trei variabile reale :

$f : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to R^3$, $f(r, \varphi, \theta) = (x, y, z)$.

Exemplul 11. Funcția $f : A \subset \mathbf{IR}^2 \to \mathbf{IR}$, $A = \{(x, y) \in \mathbf{IR}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ definită prin $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ are drept grafic mulțimea :

$\{(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ care reprezintă o suprafață din $\mathbf{IR}^3$ şi anume o semisferă.

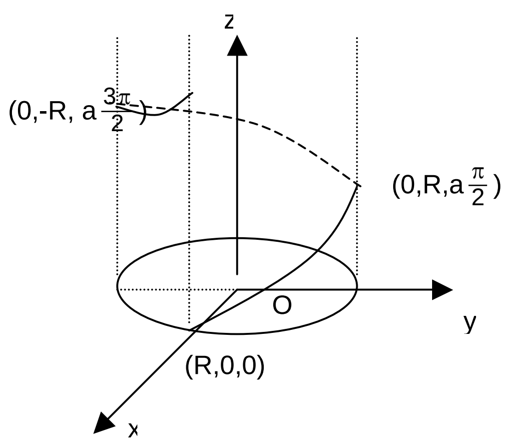


Exemplul 12. Funcția : $pr_k : \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}$, $pr_k(x^1, x^2, ..., x^p) = x^k (k = \overline{1, p})$ se numeşte *proiecția a k - a*. Pentru p=2, $pr_1(x, y) = x$, iar $pr_2(x, y) = y$. Graficul funcției pr_1 (proiecția întâia) este mulțimea $\{(x,y,z) \in \mathbf{IR}^3 \mid x,y \in \mathbf{IR},\ z = x\}$ care are drept reprezentare un plan ce trece prin axa Oy şi care taie planul zOx după prima bisectoare.

Exemplul 13. Funcția $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{IR}^3$, $f(t) = (x, y, z)$ unde $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = at$ (a, R > 0) are drept grafic mulțimea :

$\{(t, R\cos t, R\sin t, at) \in \mathbf{IR}^4 \mid t \in [0, 2\pi]\}$.

Cum $x^2 + y^2 = R^2$ este, în $\mathbf{IR}^3$, ecuația unei suprafețe cilindrice cu generatoarea paralelă cu Oz şi cu proiecția în xOy – cercul C((0, 0), R), putem reprezenta imaginea funcției f în $\mathbf{IR}^3$; ea este o curbă pe suprafața cilindrică definită – numită *buclă de elice*.



Exemplul 14. Fie : $f=(f_1,...,f_q)$: I**R**^{p}→ I**R**^{q}. Atunci f este o aplicație liniară dacă şi numai dacă componentele scalare f_k , $k = \overline{1,q}$ sunt liniare. În plus $f(x)=\sum_{k=1}^{q} f_k(x)\, e_k$ pentru orice x ∈ I**R**^{p}, unde $\{e_1,...,e_q\}$ este baza canonică a spațiului liniar I**R**^{q} / I**R**.

Observație. Dacă $f: A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ atunci $f_k = pr_k \circ f$, $k=\overline{1,q}$ definesc tocmai componentele scalare ale funcției vectoriale f.

Câmpuri scalare şi câmpuri vectoriale

Considerăm spațiul I**R**^{3} raportat la un sistem ortogonal de axe de origine O (notat Oxyz) şi versorii $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ pe semiaxele Ox, Oy, respectiv Oz. Dacă (x, y, z) sunt coordonatele unui punct M din spațiu, atunci $\overline{r}=\overline{OM}=x\,\overline{i}+y\,\overline{j}+z\,\overline{k}$ se numeşte *vectorul de poziție* al punctului M.

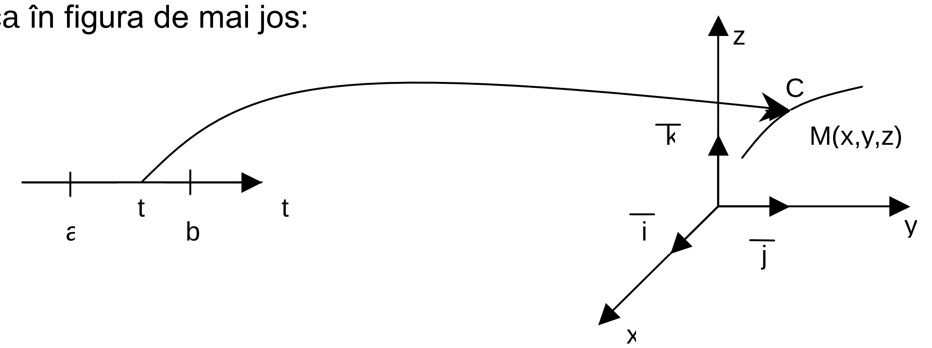
Definiția 14. O funcție $f: A \subset \mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}$ se numeşte *câmp scalar* ; vom scrie uneori $f(\overline{r})=f(x,y,z)$, unde (x, y, z) ∈ A, iar $\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$. O funcție vectorială $\overline{V}: A \subset \mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}^3$ de componente scalare P, Q, R poate fi scrisă $\overline{V}(\overline{r})=\overline{V}(x,y,z)=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$, unde $\overline{r}$ este vectorul de poziție al punctului $(x,y,z)\in A$, sau $\overline{V}=P\,\overline{i}+Q\,\overline{j}+R\,\overline{k}$; o asemenea funcție se numeşte *câmp vectorial*.

Curbe şi suprafețe

Definiția15. Fie I ⊂ I**R** un interval. O funcție vectorială $\overline{V}=f_1\overline{i}+f_2\overline{j}+f_3\overline{k}: I\to$ I**R**^{3} are ca imagine o mulțime de puncte din spațiu numită *curbă de ecuații parametrice* (sau de *reprezentare parametrică*):

$$C: x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t),\ t\in I,$$

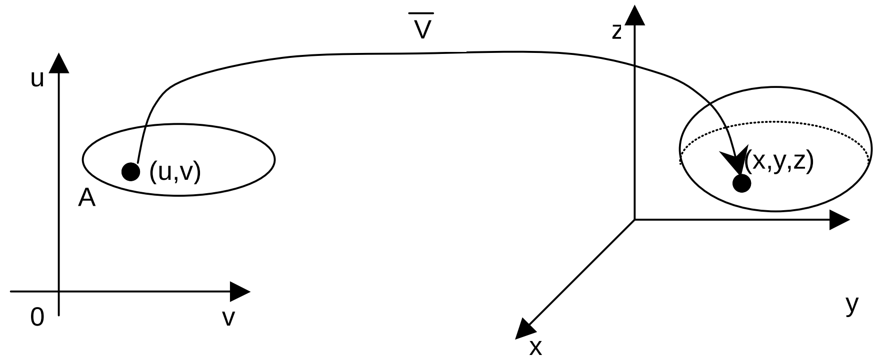
iar t ∈ I se numeşte *parametru* (vezi exemplul 13). Dacă **I** = [a, b] putem vizualiza curba C ca în figura de mai jos:



Definiția 16. Fie A ⊂ I**R**^{2}. O funcție vectorială : $\overline{V}=f_1\overline{i}+f_2\overline{j}+f_3\overline{k}: A\to IR^3$ are ca imagine o mulțime de puncte din spațiu numită *suprafață de ecuații parametrice* (de *reprezentare parametrică*) :

$$S: x=f_1(u,v),\ y=f_2(u,v),\ z=f_3(u,v),\ (u,v)\in A,$$

iar argumentele u şi v se numesc *parametri*.



Funcții parțiale

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcție de p > 1 variabile şi a = (a_1 , …, a_p) $\in$ A.

Definiția 17. Fie mulțimea : $A_i=\{x_i\in\mathbb{R} \mid (a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_p) \in A\}$, unde i $\in$ {1, …, p}. Funcția $\varphi_i = A_i \to \mathbb{R}$ definită prin :

$$\varphi_i(x_i) = f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_p)$$

se numeşte *funcția parțială în raport cu variabila* x_i *în punctul a a funcției* f.

Exemplul 15. Funcția $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ are domeniul maximal de definiție $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Fie $a = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \in A$. Pentru y = 0 obținem funcția parțială $\varphi_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ $\varphi_1(x) = f(x, 0) = \ln(1 - x^2)$, unde A_1 = (-1,1), iar pentru $x = -\frac{1}{2}$ obținem $\varphi_2 : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $\varphi_2(y) = f\left(-\frac{1}{2}, y\right) = \ln\left(\frac{3}{4} - y^2\right)$.

Operații cu funcții vectoriale

Definiția 18. Fie: $f = (f_1, ..., f_q) : A \subset \mathbb{R}^p \to B \subset \mathbb{R}^q$ şi $g = (g_1, ..., g_r) : B \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$. *Funcția compusă* $g \circ f : A \to \mathbb{R}^r$ definită uzual prin $g \circ f(x) = g(f(x)) = (g_1(f(x)), ..., g_r(f(x)))$, $x \in A$ are componentele scalare :

$$g_i(f(x)) = g_i(f_1(x_1, ..., x_p), ..., f_q(x_1, ..., x_p)), \ x = (x_1, ..., x_p) \in A$$

sau, formal: $g_i(f) = g_i(f_1, f_2, ..., f_q)$, $i = \overline{1,r}$.

Exemplul 16. Fie $f : [0,1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ definită prin :

f(t) = (arccos t , arcsin t), t $\in$ [0, 1] şi $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$

definită prin $g(\varphi, \theta) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$, $\varphi, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Atunci $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ este definită prin :

$$g \circ f(t) = g(\arccos t, \arcsin t) = \left(t^2, t\sqrt{1 - t^2}, \sqrt{1 - t^2}\right)$$, pentru orice t $\in$ [0 , 1].

Definiția 19. Fie $f, g : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ şi $\lambda \in \mathbf{IR}$. Definim *suma* $f + g : A \to \mathbf{IR}^q$ prin :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \left(f_1(x) + g_1(x), ..., f_q(x) + g_q(x)\right), x \in A$$

unde f = (f_1 , … , f_q) şi g = (g_1 , …, g_q) şi *produsul* $\lambda \cdot f : A \to \mathbf{IR}^q$ prin

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \left(\lambda f_1(x), ..., \lambda f_q(x)\right), x \in A.$$

Mai scriem şi $f + g = (f_1 + g_1, ..., f_q + g_q)$ şi $\lambda f = (\lambda f_1, ..., \lambda f_q)$.

Cu aceste operații mulțimea F(A) a funcțiilor vectoriale $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ devine un spațiu vectorial peste **IR**.

Definiția 20. Fie $f = (f_1, ..., f_q) : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ şi $\varphi : A \to \mathbf{IR}$. Produsul $\varphi f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ se defineşte prin $(\varphi f)(x) = \varphi(x) f(x),\ x \in A$; prin urmare $\varphi f = (\varphi f_1, ..., \varphi f_q)$.

C. LIMITE DE FUNCȚII

Definiția 21. Fie $A \subset \mathbf{IR}^p(\overline{\mathbf{IR}}) \to \mathbf{IR}^q(\overline{\mathbf{IR}})$ şi $a \in A'$. Spunem că funcția f *are limită în punctul de acumulare a* dacă există $b \in \mathbf{IR}^q(\overline{\mathbf{IR}})$, sau $b \in \overline{\mathbf{IR}}$ pentru q = 1 astfel încât :

$[\forall\ V \in \mathcal{V}_b\ \exists\ U \in \mathcal{V}_a : f(x) \in V,\ \forall x \in U \cap A \setminus \{a\}]$.

În acest caz spunem că b *este limita funcției* f *în a* şi scriem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, sau $f(x) \to b\ (x \to a)$. În situația în care $A \subset \mathbf{IR}^p$, p > 1 mai spunem că b este *limita funcției f în raport cu ansamblul variabilelor* şi scriem şi $\lim\limits_{\substack{x^1 \to a^1 \\ .... \\ x^p \to a^p}} f(x^1, ..., x^p) = b$ unde $a=(a^1,…,a^p)$.

Observația 1. În cazul în care q > 1, ținând cont de definiția vecinătăților, funcția $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ are limita $b \in \mathbf{IR}^q$ în punctul $a \in A'$ dacă şi numai dacă :

$$\left[\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\ x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon\right]. \qquad (*)$$

Pentru q = 1, condiția (*) este necesară şi suficientă pentru ca f să aibă limită finită în punctul a.

Observația 2. Condiția (*) este echivalentă cu următoarea :

$[\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice $x = (x^1, ..., x^p) \in A \setminus \{a\}$,

cu $\left|x^1 - a^1\right| < \delta(\varepsilon), ..., \left|x^p - a^p\right| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon]$.

Observația 3. Am văzut că un şir din $\mathbf{IR}^p$ este convergent dacă şi numai dacă şirurile coordonatelor sunt convergente. Aici vom arăta că funcția vectorială f are limită cu $a \in A'$ dacă şi numai dacă componentele sale scalare au limită finită în a. De asemenea vom indica legătura care există între limita funcției f în $a \in A'$ şi limitele şirurilor $(f(x_n)) \subset \mathbf{IR}^q$ pentru $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$, cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Teorema 7. Funcția $f=(f_1,\ldots,f_q):A\subset \mathbf{IR}^p\to \mathbf{IR}^q, q>1$ are limită în $a\in A'$ dacă şi numai dacă funcțiile $f_k : A \to \mathbf{IR}$, $k=\overline{1,q}$ au limite finite în a ; în acest caz : $\lim\limits_{x>a} f(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f_1(x),\ldots,\lim\limits_{x\to a} f_q(x)\right)$.

Demonstrație. 1. Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b=(b^1,\ldots,b^q)$. Vom arăta că $\lim\limits_{x\to a} f_k(x)=b^k$, $k=\overline{1,q}$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $\delta(\varepsilon) > 0$ a.î. :

$$\|f(x)-b\|<\varepsilon,\ \forall x\in A\setminus\{a\},\ \|x-a\|<\delta(\varepsilon). \tag{1}$$

Dar $\left|f_k(x)-b^k\right|\le\|f(x)-b\|$ iar din (1) rezultă că :

$$\left|f_k(x)-b^k\right|<\varepsilon,\ \forall\ x\in A\setminus\{a\} \text{ cu } \|x-a\|<\delta(\varepsilon).$$

Prin urmare $\lim\limits_{x\to a} f_k(x)=b^k$ (deci finită), $k=\overline{1,q}$.

2. Reciproc, presupunem că există $b^k\in \mathbf{IR}$ astfel ca:

$$\lim_{x\to a} f_k(x)=b^k,\ k=\overline{1,q}. \tag{2}$$

Vom arăta că $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b=(b^1,\ldots,b^q)$. Fie $\varepsilon>0$. Din (2) rezultă că există $\delta_k(\varepsilon)>0$, $k=\overline{1,q}$ astfel ca :

$$\left|f_k(x)-b^k\right|<\frac{\varepsilon}{q},\ \forall\ x\in A\setminus\{a\},\text{ cu } \|x-a\|<\delta_k(\varepsilon). \tag{3}$$

Fie $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_q(\varepsilon))$. Deoarece:

$$\|f(x)-b\|\le\sum_{k=1}^{q}\left|f_k(x)-b^k\right| \tag{4}$$

din (4) şi (3) rezultă că $\|f(x)-b\|<\varepsilon,\ \forall\ x\ \in A\setminus\{a\},\ \|x-a\|<\delta(\varepsilon)$.

În consecință $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Exemplul 17. Fie $f:A=\mathbf{IR}^*\times\mathbf{IR}^*\to\mathbf{IR}^3$ definită prin :

$$f(x,y)=\left(\frac{e^{xy}-1}{xy},\frac{\sin xy}{y},\ln\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right).$$

Deoarece $(0,0)\in A'$, conform teoremei 7 rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=(1,0,1)$.

Exemplul 18. Fie $f:A\subset\mathbf{IR}^2\to\mathbf{IR}^2$, $A=\mathbf{IR}^*\times\mathbf{IR}^*$ definită prin : $f(x,y)=\left(\dfrac{1}{x^2+y^2},\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)$. Desigur $(0,0)\in A'$, iar componentele scalare ale funcției f sunt definite prin $f_1(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ şi $f_2(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. Ele admit limită în origine; într-adevăr $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_1(x,y)=\infty$ şi dacă $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$ este exprimarea coordonatelor carteziene x şi y în coordonate polare, atunci $(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow\rho\to 0$; deci :

$$0 \le \left|f_2(x, y)\right| = \frac{\rho^3\left|\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right|}{\rho^2} \le 2\rho \to 0(\rho \to 0) \text{ şi } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_2(x, y) = 0.$$ Totuşi f nu are limită în (0, 0) deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x, y) = \infty$ (Teorema 7).

Teorema 8 (*Heine*). Funcţia $f : A \to \mathbf{IR}^q\ (\overline{\mathbf{IR}})$, unde $A \subset \mathbf{IR}^p$ sau $A \subset \overline{\mathbf{IR}}$, are limită în $a \in A'$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ şirul $(f(x_n))$ este convergent în $\mathbf{IR}^q$ pentru q > 1, respectiv în $\overline{\mathbf{IR}}$ pentru q=1.

Demonstraţie. 1. Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{IR}^q$ (sau $b = \infty$, ori $b = -\infty$, pentru q = 1). Fie $V \in \mathcal{V}_b$. Atunci $\exists\, U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât :

$$f(x) \in V,\ \forall\, x \in U \cap A \setminus \{a\}. \qquad (1)$$

Fie $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ un şir convergent la a. Atunci :

$$\exists\, m \in \mathbf{IN} \text{ a.î. } x_n \in U \cap A \setminus \{a\},\ \forall n \ge m. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $f(x_n) \in V$, pentru orice $n \ge m$; deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

2. Reciproc, presupunem că pentru orice şir $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ convergent la a şirul $(f(x_n))$ este convergent în $\mathbf{IR}^q$ (în $\overline{\mathbf{IR}}$ pentru q = 1).

a) Arătăm că dacă $(x_n), (y_n) \subset A \setminus \{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ atunci şirurile $(f(x_n))$ şi $(f(y_n))$ au aceeaşi limită. Definim şirul $(z_n) \subset A \setminus \{a\}$ prin :

$$z_n = \begin{cases} x_m, \text{dacă } n = 2m \\ y_m, \text{dacă } n = 2m+1 \end{cases}$$

Desigur $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ şi, conform ipotezei, şirul $(f(z_n))$ este convergent. Cum :

$$(f(x_n)) \subset (f(z_n)) \text{ şi } (f(y_n)) \subset (f(z_n)),$$

din propoziţia 2 rezultă că :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)) = \lim_{n\to\infty} f(z_n).$$

b) Fie acum $b \in \mathbf{IR}^q$ când q > 1, respectiv $b \in \overline{\mathbf{IR}}$ pentru q = 1, limita comună a şirurilor $(f(x_n))$, unde $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Vom dovedi, prin reducere la absurd, că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x) \ne b$. Atunci

$$[\exists\, V \in \mathcal{V}_b \text{ a.î. } \forall\, U \in \mathcal{V}_a\ \exists\, x \in U \cap A \setminus \{a\} \text{ şi } f(x) \notin V] \qquad (3)$$

Fie $n \in \mathbf{IN}^*$ şi p>1; atunci $U_n = S(a,1/n) \in \mathcal{V}_a$ şi din (3) rezultă că :

$$[\exists\, x_n \in S(a, \tfrac{1}{n}) \cap A \setminus \{a\},\ \text{ iar } f(x_n) \notin V]. \qquad (4)$$

Am construit şirul $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ convergent la a (căci $\left\|x_n - a\right\| < \frac{1}{n}$) pentru care $f(x_n)$ nu tinde la b, (căci $f(x_n) \notin V$), în contradicţie cu ipoteza. Prin urmare $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Dacă p=1 şi $a=\infty$ $(a=-\infty)$ obţinem acelaşi rezultat considerînd $U_n=(n,\infty]$ (respectiv $U_n=[-\infty,-n)$), $n \in \mathbf{IN}^*$.

Observaţie. Teorema lui Heine se foloseşte de cele mai multe ori în practică pentru a arăta că o funcţie nu are limită într-un punct de acumulare al domeniului sau de definiţie. Într-adevăr, dacă putem găsi două şiruri (x_n), $(y_n) \subset A \setminus \{a\}$,

$x_n, y_n \to a$ $(n\to\infty)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$ (ori $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nu există), atunci funcția f nu are limită în a.

Exemplul 18. Funcția $f : A\to \mathbb{R}$, $A= \mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, definită prin $f(x,y)=\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$ nu are limită în $(0,0)\in A'$; într-adevar dacă $a_n=b_n=\frac{1}{\sqrt{(4n+1\pi}}$ şi $c_n=d_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, atunci $((a_n,b_n)),((c_n,d_n))\subset A\setminus\{(0,0)\}$, $(a_n,b_n)\to(0,0)$ şi $(c_n,d_n)\to(0,0)$ $(n\to\infty)$, iar $f(a_n,b_n)=\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}=1\to 1$, iar $f(c_n,d_n)=\sin n\pi=0\to 0$ $(n\to\infty)$; conform teoremei lui Heine, f nu are limită în (0,0).

Exemplul 19. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x)= \begin{cases} +x, & \text{dacă} \quad x\in \mathbf{IR}\setminus\mathbf{Q} \\ -x, & \text{dacă} \quad x\in\mathbf{Q} \end{cases}$$

Arătăm că f are limită doar în origine. Fie $a\in\mathbb{R}^*$, atunci există $(x_n)\subset\mathbf{Q}\setminus\{a\}$ şi $(y_n)\subset(\mathbb{R}\setminus\mathbf{Q})\setminus\{a\}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = a$ şi $a \neq -a$. În acord cu teorema lui Heine f nu are limită în a. Dacă a=0, atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta(\varepsilon)=\varepsilon>0$ astfel ca $|f(x)|=|x|<\varepsilon$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$ cu $|x|<\delta(\varepsilon)$, adică $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Teorema 9 (*Cauchy-Bolzano*). Funcția $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ are limită (finită pentru q=1) în $a\in A'$ dacă şi numai dacă :

$$[\forall\ \varepsilon>0, \exists\ U\in\mathcal{V}_a: \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon,\ \forall x,y\in U\cap A\setminus\{a\}]\ . \tag{$*$}$$

Demonstrație. 1. Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} = b\in\mathbb{R}^q$. Fie $\varepsilon>0$; atunci:

$$[\exists U\in\mathcal{V}_a \text{ a.î. } \|f(x)-b\|<\varepsilon/2\ ,\ \forall\ x\in U\cap A\setminus\{a\}] \tag{1}$$

Fie $x,y\in U\cap A\setminus\{a\}$. Atunci, conform (1):

$$\|f(x)-f(y)\| = \|f(x)-b+b-f(y)\| \leq \|f(x)-b\| + \|f(y)-b\| < \varepsilon$$

şi proprietatea (*) este demonstrată.

2. Invers, presupunem că proprietatea (*) este adevărată. Vom demonstra existența limitei în a cu ajutorul teoremei lui Heine. Fie $x_n\subset A\setminus\{a\}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ şi $\varepsilon>0$.

Din ipoteza rezultă că există $U\in\mathcal{V}_a$ astfel ca:

$$\|f(x)-f(y)\| < \varepsilon,\ \forall x,y\in U\cap A\setminus\{a\}\ . \tag{2}$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; deci există $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel încât:

$$x_n\in U\cap A\setminus\{a\},\ \forall n\geq n(\varepsilon)\ . \tag{3}$$

Fie $m,n\geq n(\varepsilon)$; din (3) rezultă că $x_m,x_n\in U\cap A\setminus\{a\}$, deci din (2) urmează că :

$$\|f(x_n)-f(x_m)\| < \varepsilon\ ,\forall n,m\geq n(\varepsilon)\ . \tag{4}$$

Cum $\varepsilon>0$ este ales arbitrar, proprietatea (4) indică faptul că şirul $(f(x_n))$ este fundamental în $\mathbb{R}^q$; conform criteriului general de convergență al lui Cauchy şirul $(f(x_n))$ este convergent în $\mathbb{R}^q$.

Am demonstrat că pentru orice şir $(x_n)\subset A\setminus\{a\}$, $x_n\to a$ $(n\to\infty)$, şirul $(f(x_n))$ este convergent; din teorema lui Heine rezultă că există limita funcției f în punctul a.

Limite relative la submulțimi

Definiția 22. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $B \subset A$. Funcția f *are limită relativ la submulțimea* B *în* $a \in B'$, dacă restricția funcției f la submulțimea B:

$f_B : B \to \mathbb{R}^q$, $f_B(x) = f(x)$, $\forall x \in B$

are limită în a. Vom scrie şi $\lim\limits_{x\to a} f_B(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x)$.

Dacă $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ şi $B = (-\infty, a) \cap A$ atunci vom folosi notațiile:

$$\lim_{x\to a} f_B(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a-0)$$

şi vom numi această limită relativă (dacă există) *limita laterală stângă* a funcției f în a. Analog, dacă $B = (a, \infty) \cap A$, notăm:

$$\lim_{x\to a} f_B(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a+0)$$

şi vom numi acest punct din $\mathbb{R}^q$,(dacă există) *limita laterală dreaptă* a funcției f în a.

Observație. Din teorema lui Heine rezultă că dacă funcția f are limita b în $a \in A'$, atunci ea are şi limita relativă la orice submulțime $B \subset A$, pentru care $a \in B'$; în acest caz $\lim\limits_{x\to a} f_B(x) = b$.

Propoziția 7. Funcţia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ are limita în punctul interior $a \in A$ (i.e. $\exists \varepsilon > 0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$) dacă şi numai dacă există f(a-0) şi f(a+0) şi ele sunt egale; în acest caz $f(a-0) = f(a+0) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Demonstrație. 1. Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, din observația precedentă rezultă că există f(a-0) şi f(a+0) şi sunt egale cu b.

2. Reciproc, dacă $b = f(a-0) = f(a+0)$, conform definițiilor 21 şi 22, pentru orice $V \in \mathcal{V}_a$ există U_+ şi $U_- \in \mathcal{V}_a$ astfel ca

$f(x) \in V$, $\forall x \in U_- \cap (-\infty, a) \cap A$ şi

$f(x) \in V$, $\forall x \in U_+ \cap (a, \infty) \cap A$.

Observăm ca $U = U_+ \cap U_- \in \mathcal{V}_a$. Atunci, pentru orice $x \in U \cap A \setminus \{a\}$, $f(x) \in V$ şi conform definiției 21, exista $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a-0) = f(a+0) = b$.

Definiția 23. Un vector nenul $s \in \mathbb{R}^p$ se mai numeşte *direcție*, iar mulțimea $\{a + ts \mid t \in \mathbb{R}\}$ se numeşte *dreapta prin a de direcție s*. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q(\overline{\mathbb{R}})$ şi a un punct de acumulare al mulțimii $D = A \cap \{a + ts \mid t \in \mathbb{R}\}$.Limita funcției f în a, relativă la D se numeşte *limita funcției f în a dupa direcția s* (sau *după dreapta prin a de direcție s*). În acest caz, dacă $a = (a_1, \ldots, a_p)$, $s = (s_1, \ldots, s_p)$, atunci $a + ts = (a_1 + ts_1, \ldots, a_p + ts_p)$ şi limita în a după direcția s este : $\lim\limits_{x\to a} f_D(x) = \lim\limits_{t\to 0} f(a_1 + ts_1, \ldots, a_p + ts_p)$.

Dacă particularizăm : $s = e_i$, unde e_i este vector al bazei canonice din $\mathbb{R}^p$: $\{e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_p = (0,\ldots,0,1)\}$, atunci $a + te_i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_p)$ şi limita în *a* a funcției f după direcția e_i este :

$$l_i = \lim_{t\to 0} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_p);$$

ea poarta numele de *limită parțială (în* a*) după variabila* x_i. Denumirea aceasta este în acord cu egalitatea :

$$l_i = \lim_{x_i \to a_i} \varphi_i(x_i),$$

unde $\varphi:A_i\to$ **IR** este funcția parțială în raport cu variabila x_i a funcției f (vezi definiția 17).

Observație. Deoarece limitele parțiale sunt limite relative la submulțimi, rezultă că dacă funcția f are limita l (în raport cu ansamblul variabilelor) şi există o limita parțială l_i, atunci $l=l_i$. Reciproca nu este adevărată.

Exemplul 20. Fie $f: A=\mathbf{IR}^2\setminus\{(0,0)\}\to \mathbf{IR}$, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ şi $m\in\mathbf{IR}$. Atunci dreapta ce trece prin (0,0) de direcție (1,m) este $\{(x,mx)|x\in \mathbf{IR}\}$, sau altfel spus dreapta de ecuație y=mx, iar limita funcției f în (0,0) după această dreaptă este:

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to0} f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2}.$$

Conform observației de la definiția 22 rezultă că f *nu* are limită în origine (în raport cu ansamblul variabilelor). În schimb cele două funcții parțiale φ_1 şi φ_2 sunt nule, deci există limitele parțiale în (0,0) şi $l_1=l_2=0$.

Limite iterate

Definiția 24. Fie $A = B\times C \subset \mathbf{IR}^p$, $B\subset \mathbf{IR}^r$, $C \subset \mathbf{IR}^s$ (p=r+s) , $b\in B'$, $c\in C'$ şi $f : A\to \mathbf{IR}^q$; dacă r=1 (s=1) presupunem că b (respectiv c) este punct de acumulare în $\overline{\mathbf{IR}}$ pentru B (respectiv C). Pentru orice $(x,y)\in A$ definim funcțiile:

$f_x: C\to \mathbf{IR}$, $f_x(y)=f(x,y)$, $\forall\ y\in C$ şi $f_y: B\to \mathbf{IR}$, $f_y(x)=f(x,y), \forall x\in B$.

Dacă pentru orice $x\in B$ funcția f_x are limită (finită pentru q=1) în c, iar funcția :

$g : B\to \mathbf{IR}^q$, $g(x)=\lim\limits_{y\to c} f_x(y)$

are limită în b, vectorul (elementul din $\overline{\mathbf{IR}}$, pentru q=1):

$$\lim_{x\to b} g(x)=\lim_{x\to b}\lim_{y\to c} f_x(y)=\lim_{x\to b}\lim_{y\to c} f(x,y)=l_{1,2}$$

se numeşte *limită iterată* în punctul (b,c). Analog se defineşte limita iterată

$$l_{2,1}=\lim_{y\to c}\lim_{x\to b} f(x,y).$$

Exemplul 21. Existența limitei (în raport cu ansamblul variabilelor) într-un punct *nu* implică existența limitelor iterate. Într-adevăr funcția : $f : A= \mathbf{IR}^* \times \mathbf{IR}^* \to \mathbf{IR}$, $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ are limită în $(0,0)\in A'$ şi nu are limite iterate, căci: $|f(x,y)|\le |x|+|y|$, $\forall(x,y)\in A$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)=0$, iar pentru $x\neq0$ $\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{x}\lim\limits_{y\to0}\sin\dfrac{1}{y}$ nu există; prin urmare $l_{1,2}$ şi analog $l_{2,1}$ nu există. O legătură între limita unei funcții şi o limită iterată, (dacă există) este dată de :

Propoziția 8. Dacă $f:B\times C\to\mathbf{IR}^q$ are limită în (b,c) şi există $g(y)=\lim\limits_{x\to b} f(x,y)$ pentru orice $y\in C$, atunci funcția $g:C\to \mathbf{IR}^q$ are limită în c şi :

$$\lim_{y\to c} g(y)=\lim_{y\to c}\lim_{x\to b} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(b,c)} f(x,y).$$

Demonstrație. Fie $l=\lim\limits_{(x,y)\to(b,c)} f(x,y)\in \mathbf{IR}^q$ (finită pentru q=1). Fie $\varepsilon>0$, atunci:

$$\exists\ U\in\mathcal{V}_b : \forall V\in\mathcal{V}_c : \|f(x,y)-l\|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall(x,y)\in U\times V\cap A\setminus\{(b,c)\},$$

deci $\lim\limits_{x\to b}\|f(x,y)-l\| = \left\|\lim\limits_{x\to b} f(x,y)-l\right\| = \|g(y)-l\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, de unde rezultă că $\lim\limits_{y\to c} g(y) = l$.

Dacă q=1 şi $l=\infty$ ($l=-\infty$) atunci pentru orice u>0(u<0) $\exists U\in\mathcal{V}_b$ şi $\exists V\in\mathcal{V}_c$: f(x,y)>u (respectiv f(x,y)<u) pentru orice $(x,y)\in U\times V\cap A\setminus\{(b,c)\}$ deci $\lim\limits_{x\to b} f(x,y)\ge u$ (respectiv $\lim\limits_{x\to b} f(x,y)\le u$) pentru orice u>0 (u<0), adică $\lim\limits_{y\to c} g(y)=\infty$ (respectiv $\lim\limits_{y\to c} g(y)=-\infty$).

Consecinţa 1. Dacă într-un punct (b,c) există l_{12} şi l_{21} şi $l_{12}\ne l_{21}$, atunci nu există limită în raport cu ansamblul variabilelor.

Consecinţa 2. Dacă f are limita l în $(b,c)\in B\times C$ şi există $\lim\limits_{y\to c} f(x,y)=g(x)$ atunci există limita iterată l_{12} şi $l=l_{12}$.

Observaţie. Reciproca afirmaţiei din propoziţia 8 *nu* este, în general, adevarată, după cum dovedeşte următorul exemplu:

Exemplul 22. Funcţia f : $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, f(x,y)=$\frac{xy}{x^2+y^2}$ nu are limită în (0,0) (vezi exemplul 19), dar are limite iterate egale: $l_{1,2}=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0=l_{2,1}$.

D. FUNCŢII CONTINUE

Fie f : $A\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ şi $a\in A$. Se pune problema aproximării lui f(a) cu ajutorul valorilor f(x), altfel spus: cât de "bună" trebuie să fie funcţia f pentru ca vectorul $f(a)\in\mathbb{R}^q$ să poată fi înlocuit cu vectorul $f(x)\in\mathbb{R}^q$, unde $x\in A\setminus\{a\}$; mai precis : fie $\varepsilon>0$ eroarea admisă într-o problemă concretă prin înlocuirea lui f(a) cu f(x), ($x\in A$); deci vom cere ca $\|f(a)-f(x)\|<\varepsilon$ şi vom scrie $f(x)\cong f(a)$; se poate determina o vecinatatate U a punctului a astfel ca pentru orice $x\in U\cap A$ să aibă loc inegalitatea $\|f(a)-f(x)\|<\varepsilon$?

Un răspuns la această întrebare este dat de noţiunea de continuitate a funcţiei f în a, noţiune care generalizează noţiunea similară studiată în liceu.

Definiţia 18. Funcţia f : $A\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ este *continuă în a* $\in A$ (sau *a este punct de continuitate* al funcţiei f) dacă:

$$[\forall\, V\in\mathcal{V}_{f(a)}\ \exists\, U\in\mathcal{V}_a \text{ a.î. } f(x)\in V,\ \forall x\in U\cap A].$$

Dacă f este continuă în orice punct $a\in A$ spunem că *f este continuă* (pe A), sau că *f este de clasă* C^0 *pe A* şi scriem : $f\in C^0(A)$.

Observaţia 1. Vecinătatea $U\in\mathcal{V}_a$ depinde de vecinătatea $V\in\mathcal{V}_{f(a)}$ aleasă.

Observaţia 2. Din definiţia vecinătăţilor rezultă că f este continuă în $a=(a^1,\ldots,a^p)\in A$ dacă şi numai dacă :

$$[\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0 \text{ a.î. } \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon,\ \forall x\in A \text{ cu } \|x-a\|<\delta(\varepsilon)] \text{ sau echivalent:}$$

$$[\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\delta(\varepsilon)>0 \text{ a.î. } \forall\ x=(x^1,\ldots,x^p)\in A \text{ cu } |x^k-a^k|<\delta(\varepsilon),\ k=\overline{1,p}\Rightarrow \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon].$$

Definiţia 19. Punctul $a\in A\subset\mathbb{R}^p$ se numeşte punct izolat al mulţimi A dacă: $[\exists\ r>0 \text{ a.î. } S(a,r)\cap A=\{a\}]$, sau echivalent: $[\exists\ V\in\mathcal{V}_a \text{ a.î. } V\cap A=\{a\}]$.

Notăm cu IzA mulţimea punctelor izolate ale mulţimi A.

Exemplul 23. Fie $A=S((0,0),1)\cup\{(1,1)\}\subset\mathbb{R}^2$. Atunci (1,1) este un punct izolat al mulţimi A, căci :$S((1,1),\sqrt{2}-1)\cap A=\{(1,1)\}$; cum orice $(a,b)\in S((0,0),1)$ este punct de acumulare pentru A rezultă că IzA={(1,1)}.

Propoziţia 9. Dacă $a\in A\subset\mathbb{R}^p$ atunci $a\in IzA$, sau $a\in A'$.

Demonstrație. Să presupunem că $a\in A$ şi $a\notin \mathrm{Iz}A$. Atunci pentru orice $n\in \mathbf{IN}^*$ există $a_n\in S(a,\frac{1}{n})\cap A-\{a\}$. Deci $(a_n)\subset A\setminus\{a\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; din propoziția 5 rezultă că $a\in A'$.

Consecință. $A=\mathrm{Iz}A\cup(A\cap A')$.

Propoziția 10. O funcție este continuă în orice punct izolat al domeniului ei de definiție.

Demonstrație. Fie $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ şi $a\in \mathrm{Iz}A$. Atunci există $U\in \mathcal{V}_a$ astfel ca $U\cap A=\{a\}$; dacă $V\in \mathcal{V}_{f(a)}$ atunci $f(x)=f(a)\in V$, pentru orice $x\in U\cap A$, adică f este continuă în a.

Propoziția 11. Fie $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ şi $a\in A \cap A'$. Atunci f este continuă dacă şi numai dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Demonstrație.1. Presupunem că f este continuă în $a\in A \cap A'$. Atunci:

$$[\forall\ V\in \mathcal{V}_{f(a)}\ \exists\ U\in \mathcal{V}_a: f(x)\in V\ ,\forall x\in U\cap A\setminus\{a\}],$$

deci conform definiției limitei în a avem : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2. Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Fie $V\in \mathcal{V}_{f(a)}$. Din definiția limitei rezultă că există $U\in \mathcal{V}_a$ astfel ca : $f(x)\in V\ ,\forall\ x\in U\cap A\setminus\{a\}$. În plus $f(a)\in V$, deci $f(x)\in V$, $\forall x\in U\cap A$; prin urmare a este un punct de continuitate al funcției f.

Din propozițiile 9, 10, 11 şi teorema lui Heine rezultă o caracterizare a continuității unei funcții prin şiruri.

Teorema 10 (*Heine*). Funcția $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ este continuă în $a\in A$ dacă şi numai dacă :

$$[\forall\ (x_n)\subset A\ ,\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)].$$

De asemenea, propozitiile 9, 10, 11 şi teorema lui Cauchy-Bolzano (Teorema 10) ne oferă următoarea caracterizare a continuității.

Teorema 11.(*Cauchy-Bolzano*). Funcția $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ este continuă în a dacă şi numai dacă:

$$[\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ U\in \mathcal{V}_a \text{ a.î. } ||f(x)-f(y)||<\varepsilon\ ,\ \forall\ x,y\in U\cap A].$$

Teorema 7 şi propozițiile 9, 10 şi 11 ne permit să dăm o caracterizare a continuității unei funcții vectoriale prin intermediul componentelor scalare.

Teorema 12. Funcția $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ este continuă în $a\in A$ dacă şi numai dacă cele q componente scalare ale ei sunt continue în a.

Exemplul 24. Funcția $f : A= \mathbf{IR}^*\times \mathbf{IR}^* \cup\{(0,0)\}\to \mathbf{IR}$,

$$f(x,y)= \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & \text{dacă } (x,y)\in \mathbf{IR}^*\times\mathbf{IR}^* \\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

este continuă în (0,0). Într-adevăr, (0,0) este punct de acumulare al domeniului de definiție şi (vezi exemplul 20) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. De asemenea, dacă

$(a,b)\in \mathrm{I}\mathbf{R}^*\times \mathrm{I}\mathbf{R}^*$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=(a+b)\sin\frac{1}{a}\sin\frac{1}{b}=f(a,b)$, deci f este continuă în (a,b). În consecință $f\in C^0(A)$.

Exemplul 25. Funcția $f : A = \mathrm{I}\mathbf{R}^*\times \mathrm{I}\mathbf{R}^* \cup\{(0,0)\}\to \mathrm{I}\mathbf{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2y}-1}{xy}, & \text{dacă}\,(x,y)\in \mathrm{I}\mathbf{R}^*\times \mathrm{I}\mathbf{R}^* \\ 1, & \text{dacă}\,(x,y)=(0,0) \end{cases},$$

este evident continuă în orice (a,b))$\in \mathrm{I}\mathbf{R}^*\times \mathrm{I}\mathbf{R}^*$. În schimb nu este continuă în (0,0); într-adevăr, originea fiind un punct de acumulare al domeniului de definiție şi:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{x^2y}-1}{x^2y}x = 0 \neq 1 = f(0,0)\ ,$$

deci din propoziția 11 rezultă că (0,0) nu este un punct de continuitate pentru f. În consecință $f\notin C^0(A)$.

Definiția 20. Funcția $f : A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p\to \mathrm{I}\mathbf{R}^q$ este *continuă relativ la mulțimea* $B\subset A$ în punctul $a\in B$ dacă restricția f_B este continuă în a.

Observație. Dacă f este continuă în a atunci f este continuă relativ la orice submulțime B a domeniului de definiție pentru care $a\in B$. În schimb, dacă f este continuă relativ la anumite submulțimi ale domeniului nu rezultă, în general, că f este continuă.

Exemplul 26. Fie $f : \mathrm{I}\mathbf{R}^2 \to \mathrm{I}\mathbf{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Funcția f este discontinuă în (0,0) (vezi exemplul 18), căci nu există limita funcției în (0,0), dar este continuă în origine relativ la mulțimile $A_1 = \{(x,0) \mid x\in \mathrm{I}\mathbf{R}\}$ şi $A_2 = \{(0,y) \mid y\in \mathrm{I}\mathbf{R}\}$.

Definiția 21. Fie $f : A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p \to \mathrm{I}\mathbf{R}^q$ şi $a=\left(a^1,...,a^p\right)\in A$. Spunem că f *este continuă (parțial) în raport cu variabila* x^k în a $\left(k=\overline{1,p}\right)$ dacă funcția parțială $\varphi_k : A_k \to \mathrm{I}\mathbf{R}^q$ este continuă în a^k $\left(k=\overline{1,p}\right)$ (vezi definiția 17). Dacă f este continuă parțial în raport cu $x^1,x^2,...,x^p$ în a spunem că f *este continuă parțial în* a*.*

Observația 1. Dacă f este continuă în a atunci f este continuă parțial în a. Exemplul 26 arată că reciproca acestei afirmații nu este adevărată.

Observația 2. Dacă $f : A \subset \mathrm{I}\mathbf{R} \to \mathrm{I}\mathbf{R}^q$ şi $A_- = (-\infty, a] \cap A$ ($A_+ = [a, \infty) \cap A$), $a \in A$ şi f este continuă în a relativ la A_- (respectiv A_+) spunem că *f este continuă la stânga* (respectiv *la dreapta*) în a. Din propoziția 7 rezultă că f este continuă în $a \in A$ dacă şi numai dacă f este continuă la stânga şi la dreapta în a.

Propoziția 12. Dacă $f : A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p \to B\subset \mathrm{I}\mathbf{R}^q$ şi $g : B \to \mathrm{I}\mathbf{R}^r$, iar f este continuă în $a \in A$ şi g este continuă în f(a), atunci funcția compusă $g\circ f : A\to \mathrm{I}\mathbf{R}^r$ este continuă în a.

Demonstrație. Vom utiliza teorema lui Heine. Fie $(x_n)\subset A$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Deoarece f este continuă în a rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$; dar g este continuă în f(a),

deci $\lim\limits_{n\to\infty}(g\circ f)(x_n)= \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a)) = (g\circ f)(a)$, adică, în acord cu teorema lui Heine, $g\circ f$ este continuă în a.

Definiția 22. Fie $A\subset$ I**R**.

(i) Mulțimea A este *deschisă* dacă $A=\emptyset$ sau $A \neq \emptyset$ şi $A\in\mathcal{V}_a$, pentru orice $a\in A$.

(ii) Mulțimea A este *închisă* dacă CA (complementara mulțimii A) este deschisă.

(iii) Mulțimea A este *compactă* dacă ea este închisă şi mărginită.

Observație. Mulțimea nevidă $A\subset$I**R**^{p} este deschisă dacă şi numai dacă pentru orice $a \in A$ există $r > 0$ astfel ca:

$S(a,r)\subset A$ sau, echivalent, $[\forall\, a\in A\ \exists\, r>0$ a.î. $\|x-a\| < r \Rightarrow x \in A]$.

Propoziția 13. O mulțime $A\subset$I**R**^{p} este compactă dacă şi numai dacă orice şir $(x_n)\subset A$ are un subşir convergent la un punct $a\in A$.

Demonstrație. 1. Presupunem că $A\subset$ I**R**^{p} este compactă. Fie $(x_n)\subset A$; atunci şirul (x_n) este mărginit şi, din teorema lui Cesaro, rezultă că există $a\in$ I**R**^{p} şi $(x_{k_n})\subset (x_n)$, cu $x_{k_n}\to a$ ($n\to\infty$). Să presupunem, prin absurd, că $a\notin A$. Atunci $a\in CA$; cum A este închisă urmează că CA este deschisă, deci:

$\exists\, r>0$ astfel ca $\|x-a\|< r \Rightarrow x\in CA$. (1)

Dar $x_{k_n}\to a$, deci există $m \in$ I**N** astfel ca

$\|x_{k_n}-a\| < r,\ \forall\, k_n \geq m$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $x_{k_n}\in CA$, pentru orice $k_n\geq m$, în contradicție cu ipoteza $(x_n)\subset A$; prin urmare $a\in A$.

2. Reciproc, să presupunem că orice şir $(x_n)\subset A$ are un subşir convergent la un punct $a\in A$.

a). Să arătăm că A este o mulțime închisă. Presupunem, prin absurd, că A nu este o mulțime închisă , deci CA nu este deschisă; atunci:

$[\ \exists a\in CA$ a.î. $\forall r>0\ : A\cap S(a,r)\ \neq\emptyset$]. (3)

Fie $r=\dfrac{1}{n}$, $n\in$ I**N***. Din (3) rezultă că:

$\exists\, x_n \in A$ şi $\|x_n - a\|<\dfrac{1}{n}$. (4)

Am construit şirul $(x_n)\subset A$ care, conform ipotezei, are un subşir (x_{k_n}) convergent la un punct $b\in A$.

Dar, din (4), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\notin A$, deci şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$; contradicție! Prin urmare A este o mulțime închisă.

b). Arătăm acum că A este mărginită. Presupunem, prin absurd, că A nu este mărginită. Atunci:

$\exists\ (x_n)\subset A$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = \infty$. (5)

Dar, din ipoteză, există $a \in A$ şi $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$; prin urmare şirul convergent (x_{k_n}) este mărginit (conform propoziției 3), iar (5) implică: $\lim\limits_{n\to\infty}\| x_{k_n} \| = \infty$; contradicție!

Definiția 23. Fie $A\subset \mathbf{IR}^p$. Punctul $a\in\mathbf{IR}^p$ se numeşte *punct aderent al mulțimii* A dacă $A\cap V\neq\emptyset$, pentru orice vecinătate $V\in\mathcal{V}_a$. Notăm cu $\overline{A}$ mulțimea punctelor aderente mulțimii A şi spunem că $\overline{A}$ este *aderența mulțimii* A.

Observația 1. $a\in \overline{A}$ dacă şi numai dacă: $[\ \forall r > 0\ : S(a,r) \cap A \neq\emptyset\ ]$

Observația 2. $\overline{A} = \mathrm{Iz}A \cup A'$.

Exemplul 27. Mulțimea $A = \left\{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$, unde $a,b\in\mathbf{IR}^*$ este deschisă, iar $\overline{A} = \left\{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$ este închisă şi mărginită, deci este compactă. Desigur CA este închisă dar nu este compactă.

Observație. Să remarcăm că $f\in C^0(A)$ dacă pentru orice $a\in A$ şi pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta(\varepsilon,a)>0$ astfel ca $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$, pentru orice $x\in A$ cu $\|x - a\| < \delta(\varepsilon,a)$. Dacă există $\inf\{\delta(\varepsilon,a) \mid a \in A\} = \delta(\varepsilon) > 0$ atunci $\delta(\varepsilon)$ este un număr care depinde doar de ε. Această întărire a proprietății de continuitate (globală, pe tot domeniul A) a funcției f este formalizată în:

Definiția 24. Funcția $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ este *uniform continuă* (pe A) dacă:

$$[\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall x,y \in A, \|x - y\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon\ ].$$

Observație. Orice funcție uniform continuă este continuă. Reciproca acestei afirmații nu este, în general, adevărată. Deci dacă notăm cu U(A) clasa funcțiilor uniform continue pe A, atunci $U(A)\subset C^0(A)$, dar $C^0(A)\not\subset U(A)$ în general.

Exemplul 28. Funcția $f : \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}$, $f(x)=x^2$ este desigur continuă, dar nu este uniform continuă. Pentru a arăta acest fapt considerăm $\varepsilon>0$ şi presupunem, prin absurd, că f este uniform continuă. Atunci:

$$\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \forall x,y \in \mathbf{IR},\ |x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon.$$

Fie $\eta \in (0,\delta)$ şi $a,b > \frac{\varepsilon}{2\eta}$ astfel ca $|a - b| = \eta$. Atunci

$$|a^2 - b^2| = |a - b|(a + b) = \eta(a + b) > \eta\cdot 2\frac{\varepsilon}{2\eta} = \varepsilon;$$

contradicție! Deci $f\notin U(\mathbf{IR})$.

Definiția 25. O funcție $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ este *lipschitziană* (pe A) dacă există $M>0$ astfel ca:

$$\|f(x) - f(y)\| \le M\|x - y\|, \forall x,y \in A.$$

Numărul pozitiv M se mai numeşte constanta lui Lipschitz.

Reamintim că dacă f este lipschitziană iar constanta lui Lipschitz $M\in(0,1)$ atunci f se numeşte *contracție*; dacă există $M>0$ astfel ca $\| f(x) \| \le M$, pentru orice $x\in A$ spunem că f este *mărginită*.

Propoziția 14. Orice funcție lipschitziană este uniform continuă.

Demonstrație. Fie $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ o funcție lipschitziană de constantă M. Fie ε>0 şi $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Atunci pentru orice $x, y \in A$, cu $\| x - y \| < \delta$ avem:

$$\| f(x) - f(y) \| \le M \| x - y \| < \varepsilon,$$

deci f este uniform continuă.

Observație. Dacă notăm cu L(A) clasa funcțiilor lipschitziene pe A atunci: $L(A) \subset U(A) \subset C^0(A)$.

Teorema 13. Funcția $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ este uniform continuă dacă şi numai dacă:

$$[\forall (x_n), (y_n) \subset A, \text{ cu } x_n - y_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0\ ]. \tag{*}$$

Demonstrație.1. Să presupunem întâi că f este uniform continuă pe A. Fie $(x_n), (y_n) \subset A$ două şiruri astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0$. Fie ε>0. Atunci:

$$[\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in A : \|x - y\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon]. \tag{1}$$

Dar $x_n - y_n \to 0$, iar δ(ε)>0, deci există $n(\varepsilon) \in \mathbf{IN}^*$ astfel încât:

$$\|x_n - y_n\| < \delta(\varepsilon), \forall n \ge n(\varepsilon). \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că:

$$\|f(x_n) - f(y_n)\| < \varepsilon, \forall n \ge n(\varepsilon),$$

adică $\lim\limits_{n \to \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0 (\in \mathbf{IR}^q)$.

2. Reciproc, să presupunem că f are proprietatea (*) şi, prin reducere la aburd, să admitem că f nu este uniform continuă. Atunci:

$$[\exists \varepsilon > 0 \text{ a.î. } \forall \delta > 0\ \exists x, y \in A : \|x - y\| < \delta \text{ şi } \| f(x) - f(y) \| \ge \varepsilon] \tag{3}$$

Fie $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{IN}^*$. Din (3) rezultă existența unor puncte $x_n, y_n \in A$ pentru care:

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} \text{ şi } \| f(x_n) - f(y_n) \| \ge \varepsilon. \tag{4}$$

Din (4) rezultă că $x_n - y_n \to 0$ şi $f(x_n) - f(y_n)$ nu converge la 0 pentru $n \to \infty$, ceea ce este în contradicție cu (*). Deci ipoteza non-continuității uniforme a funcției f a fost falsă; prin urmare f este uniform continuă.

Exemplul 29. Funcția $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{IR}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ nu este uniform continuă. Într-adevăr, fie $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ şi $y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{n} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbf{IN}^*$. Desigur $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$, dar $f(x_n) - f(y_n) = \operatorname{ctg}\frac{1}{n} - \operatorname{ctg}\frac{2}{n} = \frac{1}{\sin\frac{2}{n}} \to \infty$ şi, conform teoremei 13, f nu este uniform continuă.

Vom da în continuare o condiție suficientă pentru ca $U(A) = C^0(A)$.

Teorema 14. O funcție continuă pe o mulțime compactă este uniform continuă.

Demonstrație. Fie $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ continuă, unde A este compactă în $\mathbf{IR}^p$. Presupunem, prin absurd, că f nu este uniform continuă. Atunci:

$$[\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x, y \in A : \|x - y\| < \delta \text{ şi } \| f(x) - f(y) \| \ge \varepsilon\ ]. \tag{1}$$

Fie $\delta = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{IN}^*$. Din (1) rezultă că:

$$\left[\exists x_n, y_n \in A : \|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} \text{ şi } \| f(x_n) - f(y_n) \| \geq \varepsilon\ \right]. \tag{2}$$

Cum $(x_n),(y_n) \subset A$, iar A este compactă, deci mărginită, din teorema lui Cesaro urmează că cele două şiruri au puncte limită, adică:

$$\left[\exists x,y \in A \text{ şi } (x_{k_n}) \subset (x_n), (y_{k_n}) \subset (y_n) \text{ a.î. } x_{k_n} \to x \text{ şi } y_{k_n} \to y\ \right]. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă că:

$$\|x_{k_n} - y_{k_n}\| < \frac{1}{k_n} \to 0 (n \to \infty), \text{ deci } x = y.$$

Dar f este continuă pe A, iar din teorema lui Heine urmează că:

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})\right) = f(x) - f(y) = 0,$$

în contradicție cu (1): $\| f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \| \geq \varepsilon > 0$. Deci f∈U(A).

Observație. Am văzut că L(A)⊂U(A)⊂C^0(A) şi că C^0(A)⊄U(A) în general. În exemplul următor arătăm că U(A)⊄L(A), adică există funcții uniform continue care nu sunt lipschitziene.

Exemplul 30. Funcția $f : [0,1] \to \mathbf{IR}_+, f(x) = \sqrt{x}$ este continuă pe un compact deci, din teorema 14, rezultă că f∈U[0,1]. Vom arăta că f∉L[0,1]. Pentru aceasta este suficient să arătăm că:

$$\left[\forall M > 0\ \exists x,y \in [0,1] : | f(x) - f(y) | > M | x - y |\ \right],$$

sau, echivalent:

$$\left[\forall M > 0\ \ \exists x,y \in [0,1], x \neq y \text{ şi } \sqrt{x} + \sqrt{y} < \frac{1}{M}\ \right]. \tag{1}$$

Fie M≥1. Atunci $\frac{1}{M} \leq 1$ şi pentru x=0 şi $y < \frac{1}{M^2}$ are loc (1). Dacă $M \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, pentru x=1 şi $\sqrt{y} < \frac{1}{M} - 1$, deci $y < \left(\frac{1}{M} - 1\right)^2 \leq 1$, are loc (1). În sfârşit, dacă $M \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, atunci $\frac{1}{M} > 2$ şi (1) are loc pentru orice x,y∈[0,1].

Teorema 15. O funcție continuă pe un compact are imaginea compactă.

Demonstrație. Fie $A \subset \mathbf{IR}^p$ o mulțime compactă şi $f : A \to \mathbf{IR}^q$ o funcție continuă. Vom arăta că imaginea lui f:

$$\operatorname{Im} f = f(A) \subset \mathbf{IR}^q$$

este compactă în $\mathbf{IR}^q$, folosind propoziția 13. Fie $(y_n) \subset f(A)$. Atunci există şirul $(x_n) \subset A$ astfel încât $f(x_n)=y_n$. Dar A este compactă şi, din propoziția 13, urmează că:

$$\left[\ \exists (x_{k_n}) \subset (x_n) \text{ şi } \exists a \in A \text{ a.î. } \lim_{n\to\infty} x_{k_n} = a\ \right]. \tag{1}$$

Din teorema lui Heine şi (1), cum f este continuă, rezultă că:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} y_{k_n} = f(a) \in f(A),$$

deci şirul $(y_n) \subset f(A)$ are subşirul (y_{k_n}) convergent la $f(a) \in f(A)$; prin urmare, din propoziția 13, rezultă că f(A) este o mulțime compactă.

Teorema 16. O funcție scalară (q=1) continuă pe un compact este mărginită şi îşi atinge marginile.

Demonstrație. Fie $f : A \subset IR^p \to IR$, A compact şi $f \in C^0(A)$. Din teorema 15 rezultă că f(A) este închisă şi mărginită. Fie:

$m = \inf f(A)$ şi $M = \sup f(A)$ (1)

marginile funcției f. Să presupunem prin absurd că, de exemplu, marginea superioară M nu este atinsă, deci:

$M \notin f(A)$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că:

$M - f(x) > 0, \ \forall x \in A$. (3)

Atunci funcția $g : A \to \mathbf{IR}$, $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ este continuă şi pozitivă pe A; cum A este un compact, rezultă că g este mărginită, deci:

$\exists N > 0 : 0 < g(x) \le N, \forall x \in A$. (4)

Din definiția marginii superioare M şi din (2) rezultă că:

$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ x \in A$ a.î. $M-\varepsilon < f(x) < M$. (5)

Fie $\varepsilon = \dfrac{1}{N}$. Din (5) rezultă că:

$\exists x \in A$ a.î. $M - \dfrac{1}{N} < f(x)$, sau $g(x) > N$,

în contradicție cu (4). Prin urmare $M \in f(A)$. Analog se arată că marginea inferioară este atinsă, adică $\exists x_0 \in A$ astfel ca $f(x_0) = m$.

Observație. Să notăm cu M(A) clasa funcțiilor mărginite pe $A \subset IR^p$. Dacă A este un compact atunci $L(A) \subset U(A) = C^0(A) \subset M(A)$. Desigur, în general $M(A) \ne C^0(A)$.

Exemplul 31. Funcția $f : IR \to IR$,

$f(x) = \begin{cases} \sin x & ,\text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ -\sin x & ,\text{dacă } x \in \mathbf{IR} - \mathbf{Q} \end{cases}$, nu este continuă dar este mărginită şi îşi atinge marginile: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ şi $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$.

E. EXERCIȚII

Exercițiul 1. Să se verifice că egalitățile următoare definesc norme pe IR^p.

(a) $\|x\| = \max(|x^1|,...,|x^p|)$

(b) $\|x\| = |x^1| + ... + |x^p|$

unde $x = (x^1,...,x^p) \in \mathbf{IR}^p$.

Exercițiul 2. Să se verifice că funcția $\|\ \| : M_{n\times m}(\mathbf{IR}) \to \mathbf{IR}_+$ definită prin $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$, unde $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbf{IR})$, este o normă pe spațiul liniar real al matricilor cu n linii şi m coloane.

Indicație. Pentru proprietatea (N_3) se foloseşte inegalitatea lui Minkowsky.

Exercițiul 3. Să se studieze convergența şirurilor $(x_n)_{n\geq 2}$, unde:

(a) $$x_n = \begin{cases} \left(n, \dfrac{1}{n}\right) & \text{,dacă n este par} \\ \left(\dfrac{1}{n}, n\right) & \text{,dacă n este impar} \end{cases}$$

(b) $$x_n = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} k^a}{\sum_{k=1}^{n} k^{a+1}}, \frac{\ln n \cdot \ln n!}{n^n} \right), a \in \mathbf{IN}$$

(c) $$x_n = \left(\sqrt[n]{\operatorname{tg} \frac{n\pi}{2n+1}}, \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} \right)$$

Răspuns. (a) divergent; (b) $x_n \to (0,0)$; (c) $x_n \to \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Exercițiul 4. Să se arate că şirul $(x_n) \subset \mathbf{IR}^p$ este convergent dacă şi numai dacă subşirurile (x_{2n}), (x_{2n+1}) şi (x_{3n}) sunt convergente.

Exercițiul 5. Fie (x_n), $(y_n) \subset \mathbf{IR}^p$ convergente la x, respectiv la y şi $(a_n) \subset \mathbf{IR}$ convergent la $a \in \mathbf{IR}$. Să se arate că:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = ax$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \| = \| x \|$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$

Exercițiul 6. Să se studieze convergența seriilor cu termenul general $x_n, n \in \mathbf{IN}^*$, $n \geq 2$.

(a) $$x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n}, n \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \right)$$

(b) $$x_n = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{n} \right)$$

(c) $$x_n = \left(\frac{1}{\ln^n(n+1)}, \arcsin^n \frac{1}{n} \right)$$

(d) $$x_n = \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} a^n, \frac{a}{n} \operatorname{arctg} \frac{a}{n} \right), a > 0$$

(e) $$x_n = \left(\frac{\sin nx}{n^a}, \frac{\cos nx}{n^a} \right), a > 0$$

Răspuns. (a) divergentă; (b) convergentă; (c) convergentă; (d) convergentă pentru $a < e$ şi divergentă pentru $a \geq e$; (e) convergentă.

Exercițiul 7. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ şi în caz de convergență să se calculeze suma sa *s*, unde:

(a) $x_n = \left(\frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, 4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} \right)$

(b) $x_n = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} k^a}{\sum_{k=1}^{n} k^{a+1}}, \frac{\ln n \cdot \ln n!}{n^n} \right), a \in \mathbf{IN}$

(c) $x_n = \left(4 \cdot 3^{n-1} \cdot \sin^3 \frac{\pi}{2 \cdot 3^n}, \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} \right)$

(d) $x_n = \left(e^{-nx}, \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right), x > 0$

(e) $x_n = \left(\frac{an+1}{a^n}, \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} \right), a \geq 0$

Răspuns. (a) $s = (1, \pi)$; (b) divergentă; (c) $s = \left(\frac{\pi}{2} - 1, \ln 4 - \frac{5}{4} \right)$; (d) $s = \left(\frac{1}{e^x - 1}, 1 \right)$; (e) divergentă pentru $a \leq 1$ şi convergentă pentru $a > 1$ şi $s = \left(\frac{a^2 - a - 1}{a - 1}, \frac{1}{a - 1} \right)$.

Exercițiul 8. Fie U, V$\in \mathcal{V}_a$, a$\in$I**R**^{p}. Să se arate că:

$a \in U$;

V$\cup$A$\in \mathcal{V}_a$, $\forall$A$\subset$ I**R**^{p};

U$\cap$V$\in \mathcal{V}_a$.

Exercițiul 9. Să se determine mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii A, unde:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbf{IR}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(2,2)\}$

(b) $A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) \mid n,m \in \mathbf{IN}^* \right\}$

(c) $A = S((0,0,0),r) \subset \mathbf{IR}^3, r > 0$

(d) A = I**N** $\times$ I**N**

Răspuns. (a) A'={(x,y)$\mid$1$\leq$x^2+y^2$\leq$4};

(b) $A' = \left\{ \left(0, \frac{1}{m} \right) | m \in \mathbf{IN}^* \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) | n \in \mathbf{IN}^* \right\} \cup \{(0,0)\}$; (c) $A' = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$; (d) $A' = \emptyset$.

Exercițiul 10. Fie A,B $\subset$ I**R**^{p}. Să se arate că:

$(A \cup B)' = A' \cup B'$

$(A')' \subset A'$.

Exercițiul 11. Să se arate că funcția $f: \mathbf{IR}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{IR}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ are limită în (0,0) după orice dreaptă prin origine, dar nu are limită (în raport cu ansamblul variabilelor) în (0,0).

Exercițiul 12. Să se studieze existența limitei l şi a limitelor iterate în origine pentru funcția f, unde:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$, $f: \mathbf{IR}_+ \times \mathbf{IR}_- \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{IR}$

(b) $f(x,y) = \left(x \sin\dfrac{1}{y}, y \sin\dfrac{1}{x}\right)$, $f: \mathbf{IR}^* \times \mathbf{IR}^* \to \mathbf{IR}^2$

(c) $f(x,y,z) = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2+z^2}$, $f: \mathbf{IR}^* \times \mathbf{IR}^* \times \mathbf{IR}^* \to \mathbf{IR}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & ,\text{dacă } xy \neq 0 \\ 0 & ,\text{dacă } xy = 0 \end{cases}$, $f: \mathbf{IR}^2 \to \mathbf{IR}$

(e) $f(x,y) = x \sin\dfrac{1}{y}$, $f: \mathbf{IR} \times \mathbf{IR}^* \to \mathbf{IR}$

(f) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f: \mathbf{IR}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{IR}$

Răspuns. (a) $l_{12}=l_{21}=0$, nu există l; (b) nu există l_{12} şi l_{21}, iar $l=0$; (c) $l_{123}=l_{132}=l_{213}=l_{231}=l_{312}=l_{321}=l=0$; (d) $l_{12}=l_{21}=1$, nu există l; (e) nu există l_{12}, iar $l_{21}=l=0$; (f) $l_{12}=1, l_{21}=-1$, nu există l.

Exercițiul 13. Să se reprezinte grafic domeniul maxim de definiție al funcției f, unde:

(a) $f(x,y) = \ln(x^2-y^2)$

(b) $f(x,y) = \arcsin(x^2-y^2)$

(c) $f(x,y) = \ln(1-|x|-|y|)$

(d) $f(x,y,z) = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}$, $a,b,c \in \mathbf{IR}^*$

(e) $f(x,y,z) = \arccos\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}\right)$, $a,b,c \in \mathbf{IR}^*$

(f) $f(x,y,z) = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}\right)$, $a,b,c \in \mathbf{IR}^*$

(g) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2-z}$

(h) $f(x,y,x) = \sqrt{x^2+y^2-z^2}$.

Exercițiul 14. Să se arate că pentru orice aplicație liniară $f \in L(\mathbf{IR}^p, \mathbf{IR}^q)$ are loc inegalitatea :

$$\|f(x)\| \le \|A\| \cdot \|x\|, \quad x \in \mathbf{IR}^p,$$

unde A este matricea aplicației f.

Indicație. Se foloseşte inegalitatea lui Cauchy-Buniakowsky-Schwarz:

$$\left(\sum_{k=1}^{p}|a_k b_k|\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{p}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{p}b_k^2\right), \text{ unde } a_k,\ b_k \in \mathbf{IR},\ k=\overline{1,p}.$$

Exercițiul 15. Fie T clasa mulțimilor deschise din I**R**^{p}. Să se arate că T are următoarele proprietăți:

(a) Ø, I**R**^{p} $\in$ T

(b) G, D $\in$ T $\Rightarrow$ G$\cap$D $\in$ T

(c) $G_i \in T$, $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \in T$,

unde I este o mulțime nevidă.

Exercițiul 16. Să se arate că $C^0(A)$ este un spațiu vectorial peste I**R**.

Exercițiul 17. Să se arate că dacă A $\subset$ I**R**^{p} este o mulțime deschisă atunci $pr_k(A) = \{pr_k(x) \mid x \in A\}$ este o mulțime deschisă (în I**R**), $k=\overline{1,p}$.

Exercițiul 18. Fie A $\subset$ I**R**^{p} o mulțime închisă şi a $\in$ A. Să se arate că există $(x_n) \subset A$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Exercițiul 19. Fie A $\subset$ I**R**^{p}. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) A este o mulțime închisă

(b) $A = \overline{A}$

(c) $A' \subset A$

Exercițiul 20. Să se arate că dacă A $\subset$ I**R**^{p} este mărginită, iar $f \in U(A)$, atunci f este mărginită.

Exercițiul 21. Să se studieze continuitatea, uniform continuitatea şi mărginirea funcției

f : I**R**→ I**R**, f(x)=x–arctg x.

Indicație. Se arată că $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$.

Exercițiul 22. Să se arate că orice funcție $f: \mathbf{IN} \to \mathbf{IR}$ este uniform continuă.

Exercițiul 23. Fie $f: \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \ne 0 \\ 0 \quad, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$.

Să se arate că imaginea oricărui interval $[a, b]$ este o mulțime compactă, deşi f nu este continuă.

Exercițiul 24. Să se arate că $L(\mathbf{IR}^p, \mathbf{IR}^q) \subset U(\mathbf{IR}^p)$.

Exercițiul 25. Fie $A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p$ un compact şi $f : A \to B \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^q$ o funcție continuă şi bijectivă. Să se arate că inversa ei este de asemenea continuă.

Exercițiul 26. Să se arate că funcția $f : \mathrm{I}\mathbf{R}^2 \to \mathrm{I}\mathbf{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{dacă } x^2+y^4\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x^2+y^4=0\end{cases}$$

este continuă parțial dar nu este continuă.

Exercițiul 27. Să se arate că $f\in C^0(\mathrm{I}\mathbf{R}^2)$, unde

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x^2+y^2=0\end{cases}$$

Exercițiul 28. Să se demonstreze că funcția definită prin

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2+z^2}, & \text{dacă } x^2+y^2+z^2\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x^2+y^2+z^2=0\end{cases}$$

este uniform continuă pe $A=\left\{(x,y,z)\in \mathrm{I}\mathbf{R}^3 \middle| \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$, $a,b,c\in \mathrm{I}\mathbf{R}^*$.

Exercițiul 29. Fie $f : A \subset \mathrm{I}\mathbf{R} \to \mathrm{I}\mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu derivata mărginită. Să se arate că $f\in U(A)$.

Indicație. Se arată că $f\in L(A)$ cu ajutorul teoremei lui Lagrange.

Exercițiul 30. Fie $\mathcal{F}$ clasa mulțimilor închise din $\mathrm{I}\mathbf{R}^p$. Să se arate că:

(i) $\varnothing, \mathrm{I}\mathbf{R}^p \in \mathcal{F}$

(ii) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

(iii) $F_i \in \mathcal{F}, i\in I \Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{F}$

unde I este o mulțime nevidă.

Exercițiul 31. Fie $A,B\subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p$ compacte. Să se arate că mulțimile: $A\cap B$ şi $A\cup B$ sunt compacte.

DERIVABILITATE ŞI DIFERENȚIABILITATE

În acest capitol vom generaliza noțiunea de derivabilitate cunoscută din liceu pentru funcții de mai multe variabile. Noțiunea de diferențiabilitate pe care o vom studia aici ne va permite să aproximăm valoarea unei funcții într-un punct cu valoarea unui polinom de gradul întâi în acel punct, îmbunătățind astfel rezultatele cunoscute de la funcțiile continue.

Reamintim că dacă $f : A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p \to \mathrm{I}\mathbf{R}$ este continuă în $a \in A$, atunci există o vecinătate $U \in \mathcal{V}_a$ pentru care $f(x) \cong f(a)$, pentru $x \in U \cap A$ (aproximare cu o constantă). Aici vom arăta că, în anumite condiții, există un polinom de gradul întâi de p variabile T_1 pentru care $f(x) \cong T_1(x)$, pentru $x \in U \cap A$.

A. DERIVATE PARȚIALE

Definiția 1. Fie $A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p$. Un punct $a \in A$ se numeşte *punct interior al mulțimii A* dacă există o sferă cu centrul în a inclusă în A, adică,

$\exists r > 0$ astfel încât $S(a,r) \subset A$.

Mulțimea punctelor interioare ale mulțimii A se numeşte *interiorul mulțimii A* şi se notează Å sau int A.

Observația 1. Mulțimea $A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p$ este deschisă dacă şi numai dacă A=Å. Într-adevăr, dacă A este deschisă, atunci pentru orice $a \in A$ există $r > 0$ astfel ca $S(a,r) \subset A$, deci a este punct interior şi prin urmare $A \subset$ Å; în plus din definiția1 rezultă că Å$\subset$A, deci A=Å. Invers, dacă Å=A, atunci pentru orice $a \in A$ există $r > 0$ astfel ca $S(a,r) \subset A$; deci A este o mulțime deschisă.

Observația 2. Interiorul mulțimii A este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în A; deci dacă G este o mulțime deschisă inclusă în A atunci G$\subset$ Å.

Exemplul 1. Fie A={(x,y,z)$\in \mathrm{I}\mathbf{R}^3 \mid$ x,y,z ≥ 0, $x^2+y^2+z^2 \leq 1$}.
Atunci Å={(x,y,z) $\in \mathrm{I}\mathbf{R}^3 \mid$ x,y,z > 0, $x^2+y^2+z^2 < 1$}.

Propoziția 1. Dacă $A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p$ atunci Å$\subset A'$.

Demonstrație. Fie $a \in$ Å. Conform definiției 1 rezultă că există $r > 0$ astfel ca $S(a,r) \subset A$, deci $S(a,r) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$, adică a este un punct de acumulare al mulțimii A.

Consecință. Dacă $a \in$ Å atunci există $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Afirmația rezultă din propoziția 1 şi propoziția 5 din cap.1.

Definiția 2. Fie $f : A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p \to \mathrm{I}\mathbf{R}^q$ o funcție şi $B = \{e_1,...,e_p\}$ respectiv $B_q = \{e'_1,...,e'_q\}$ bazele canonice din spațiile liniare $\mathrm{I}\mathbf{R}^p$, respectiv $\mathrm{I}\mathbf{R}^q$. Spunem că *funcția f este derivabilă parțial în raport cu* x_i (unde $i \in \{1,2,...,p\}$) *în punctul* $a \in$ Å dacă există:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in \mathrm{I}\mathbf{R}}} \frac{1}{t}[f(a+te_i)-f(a)] \in \mathrm{I}\mathbf{R}^q . \qquad (*)$$

Această limită se numeşte *derivata parțială a funcției* f *în raport cu* x_i *în punctul* a şi se notează $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sau $f'_{x_i}(a)$. Dacă f este derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă în a spunem că f *este derivabilă parțial în* a. Dacă A=Å şi f este derivabilă parțial în raport cu x_i în orice punct a∈A spunem că f *este derivabilă parțial în raport cu* x_i (*pe* A); în acest caz funcția:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i} : A \to \mathbf{IR}^q, a \mapsto f'_{x_i}(a)$$

se numeşte *derivata parțială a funcției* f *în raport cu* x_i. Dacă f este continuă pe A, derivabilă parțial în raport cu $x_i, i=\overline{1,p}$ şi cu derivatele parțiale continue spunem că f *este de clasă* C^1 *pe* A şi scriem $f \in C^1(A)$.

Observația 1. Dacă a∈Å, atunci există $r > 0$ astfel ca $S(a,r) \subset A$; în acest caz pentru $t < r$, $a + te_i \in A$, deci are sens problema determinării derivatei parțiale din (*).

Observația 2. În cazul $p = 1, \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(a+t) - f(a)]$, sau , notând x=a+t, atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; deci în cazul funcțiilor de o variabilă derivata parțialăcoincide cu derivata şi vom păstra notațiile din liceu: $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

În cazul $p = 2$, dacă $(a,b) \in Å \subset$ I$\mathbf{R}^2$:

$$f'_x(a,b) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f((a,b)+t(1,0)) - f(a,b)] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(a+t,b) - f(a,b)] \underset{x=a+t}{=}$$

$$\underset{x=a+t}{=} \lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \text{ şi, analog } f'_y(a,b) = \lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}.$$

Observația 3. Dacă $f = (f_1,...,f_q)$, iar a∈Å, atunci conform propoziției 1, $a = (a_1,...,a_p) \in A'$, iar din teorema 7 (cap.1) rezultă că f este derivabilă parțial dacă şi numai dacă cele q componente scalare sunt derivabile parțial în a; în plus:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a),...,\frac{\partial f_q}{\partial x_i}(a)\right).$$

Dacă notăm $x_i = a + te_i$ atunci $t \to 0$ dacă şi numai dacă $x_i \to a_i$ şi:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i\to a_i}\frac{f_j(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_p) - f_j(a_1,...,a_p)}{x_i - a_i}.$$

Prin urmare, derivata parțială a funcției f_j în a este derivata funcției parțiale în raport cu variabila x_i, adică derivata unei funcții de o singură variabilă. Prin urmare din derivabilitatea parțială a funcției f în a rezultă continuitatea sa parțială în a. Derivabilitatea parțială, pentru $p > 1$, nu implică continuitatea, după cum arată următorul exemplu.

Exemplul 2. Funcția f : I$\mathbf{R}^2$→I$\mathbf{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$ este discontinuă în (0,0) (vezi exemplul 26, cap.1) dar este derivabilă parțial, căci :

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \qquad \text{şi}$$

$$f'_x(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\ \text{pentru}(x,y)\neq(0,0).$$

Deci $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{dacă } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{,dacă } x=y=0\end{cases}$ şi analog

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & , x=y=0.\end{cases}$$

Prin urmare $f\notin C^0$ (I$\mathbf{R}^2$) deci $f\notin C^1$ (I$\mathbf{R}^2$).

Exemplul 3. Fie $f: A=(0,\infty)\times(0,2\pi)\to$ I$\mathbf{R}^2$, $f(\rho,\varphi)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$. Desigur $f\in C^0(A)$. Deoarece $f'_\rho(\rho,\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ şi $f'_\varphi(\rho,\varphi)=(-\rho\sin\varphi,\rho\cos\varphi)$ rezultă că $f'_\rho, f'_\varphi\in C^0(A)$. Prin urmare $f\in C^1(A)$.

Definiția 3. Fie f:A$\subset$ I$\mathbf{R}^p\to$I$\mathbf{R}^q$ şi a$\in$Å. Dacă f este derivabilă parțial în raport cu x_i pe o sferă $S(a,r)\subset A$, i.e. $\exists f'_{x_i}(x),\forall x\in S(a,r)$) iar f'_{x_i} este derivabilă parțial în raport cu x_j în a spunem că f *este derivabilă parțial de două ori în raport cu* x_i *şi* x_j; deci există:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+te_j)-f(a)\right]\in \text{I}\mathbf{R}^q.$$

Notăm această limită(dacă există) cu $f''_{x_ix_j}(a)$ sau $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$ şi o numim *derivata parțială de ordinul doi* (*derivata a* II *-a*) *a funcției* f *în raport cu* x_i *şi* x_j. Dacă i$\neq$j şi există $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$ le numim *derivate mixte în raport cu* x_i *şi* x_j *în* a.
Dacă i=j numim derivata a II- a în raport cu x_i şi x_j *derivata parțială de ordinul doi(ori derivata a II -a) în raport cu* x_i *în* a şi o notăm $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}}(a)$, ori $f''_{x_i^2}(a)$. Analog se definesc derivatele de ordin superior lui doi. Dacă A=Å, f este continuă şi admite derivate parțiale de orice ordin $h\leq n$, continue pe A spunem că f este de clasă C^n pe A şi scriem $f\in C^n(A)$. Dacă $f\in C^n(A)$ pentru orice n$\in$I**N** spunem că f este de clasă C^∞ pe A şi scriem $f\in C^\infty(A)$.

Derivata de ordinul n în raport cu x_i(dacă există) se notează: $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_i^{\,n}}$, sau $f^{(n)}_{x_i^n}$, iar derivata parțială de ordinul m în raport cu x_j (dacă există) a funcției $f^{(n)}_{x_i^n}$ o notăm:

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x_i^{\,n} \partial x_j^{\,m}} \text{ sau } f^{(n+m)}_{x_i^n x_j^m} \quad .$$

Observație. Pentru funcțiile de o singură variabilă derivabile de n ori se cunoaşte din liceu formula de derivare a produsului(*formula lui Leibniz*):

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

unde prin derivata de ordinul zero a funcției u (sau v) se înțelege chiar funcția u (respectiv v). Cum derivatele parțiale sunt, de fapt, derivatele funcțiilor parțiale, deci derivate ale unor funcții de o singură variabilă, rezultă că formula lui Leibniz este valabilă şi pentru produse de funcții scalare de mai multe variabile.

Exemplul 4. Să calculăm $\frac{\partial^{13} f}{\partial x^7 \partial y^6}$ pentru funcția $f(x,y) = (x-y)e^{x+y}$.

Calculăm întâi $f^{(7)}_{x^7}$:

$$\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}(x,y) = \sum_{k=0}^{7} C_7^k (x-y)^{(7-k)}_{x^{7-k}} \left(e^{x+y}\right)^{(k)}_{x^k} = C_7^7 (x-y) e^{x+y} + C_7^6 e^{x+y} = e^{x+y}(x-y+7)$$

Atunci: $$\frac{\partial^{13} f}{\partial x^7 \partial y^6}(x,y) = \frac{\partial^6}{\partial y^6}\left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}\right)(x,y) = \sum_{k=0}^{6} C_6^k \left(e^{x+y}\right)^{(6-k)}_{y^{6-k}} \cdot (x-y+7)^{(k)}_{y^k} =$$

$$= C_6^0 e^{x+y}(x-y+7) + C_6^1 e^{x+y}(-1) = e^{x+y}(x-y+1).$$

Exemplul 5. Să calculăm derivatele mixte de ordinul doi pentru funcția

$f : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases}$. Pentru $(x,y) \neq (0,0)$ avem:

$$f'_x(x,y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2) - 2x^4y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{şi}$$

$$f''_{xy}(x,y) = \left(f'_x\right)'_y(x,y) = \frac{(x^4+9x^2y^2)(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)(x^4y+3x^2y^3)}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{x^6 + 6x^4y^2 - 3x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}, \quad \text{iar: } f'_y(x,y) = \frac{x^3(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{şi}$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{(5x^4 - 3x^2y^2)(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)(x^5 - x^3y^2)}{(x^2+y^2)^4} = f''_{xy}(x,y).$$

Pentru $(x,y) = (0,0)$:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \text{ şi } f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = 0, \text{ iar}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \quad \text{şi}$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

Deci: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Să remarcăm că dacă trecem la coordonate polare: $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$, atunci: $(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow \rho \to 0$ şi: $0 \le |f(x,y)| \le \rho^2 \to 0$, deci $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$; prin urmare $f \in C^0$ (I**R**^{2}), iar:

$$0 \le \left| f'_x(x,y) \right| \le 4\rho \to 0 \text{, deci } f'_x \in C^0 \text{ (I}\mathbf{R}^2\text{) şi}$$

$$0 \le \left| f'_y(x,y) \right| \le 2\rho \to 0 \text{, deci } f'_y \in C^0 \text{ (I}\mathbf{R}^2\text{),}$$

adică $f \in C^1$ (I**R**^{2}).

Cu toate că există derivatele mixte f''_{xy}, f''_{yx} : I**R**$^2 \to$ I**R** ele nu sunt continue, deci $f \notin C^2$ (I**R**^{2}). Într-adevăr dacă $y = mx$ este ecuația unei drepte prin origine, atunci:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f''_{xy}(x,y) = \lim_{x\to 0} f''_{xy}(x,mx) = \frac{1+6m^2-3m^4}{\left(1+m^2\right)^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f''_{yx}(x,y),$$

deci nu există limita în origine (în raport cu ansamblul variabilelor), adică (0,0) este un punct de discontinuitate al derivatelor mixte.

În continuare vom arăta că *funcțiile de clasă* C^2 *au derivatele mixte egale*. Pentru simplificarea notațiilor vom arăta această proprietate pentru $p = 2$ şi $q = 1$ în ipoteze mai generale.

Teorema 1 (*Schwarz*). Fie f : A ⊂ I**R**$^2 \to$ I**R** şi $(a,b) \in \mathring{A}$. Dacă există o vecinătate deschisă $V \in \mathcal{V}_{(a,b)}$ şi există derivatele parțiale $f'_x(x,y), f'_y(x,y), f''_{xy}(x,y)$ pentru orice $(x,y) \in V$, iar f''_{xy} este continuă în (a,b) atunci există $f''_{yx}(a,b)$ şi $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$.

Demonstrație. Fie h, k∈ I**R*** astfel ca $(a+h, b+k) \in V$ şi

$$F(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) \quad (1)$$

Dacă notăm $g(x,y) = f(x,y+k) - f(x,y)$, atunci:

$$F(h,k) = g(a+h,b) - g(a,b)$$

Aplicând teorema lui Lagrange funcției parțiale $g(x,b)$ pe intervalul $[a,a+h]$ rezultă că există $\theta \in (0,1)$ astfel încât:

$$F(h,k) = hg'_x(a+\theta h,b).$$

Ținând seama de definiția funcției g rezultă că:

$$F(h,k) = h\left[f'_x(a+\theta h,b+k) - f'_x(a+\theta h,b)\right].$$

Deoarece pe V există derivata mixtă f''_{xy} rezultă că funcția parțială $f'_x(a+\theta h,y)$ verifică ipotezele teoremei lui Lagrange pentru $y \in [b,b+k]$, deci există $\theta' \in (0,1)$ astfel încât:

$$F(h,k) = hkf''_{xy}(a+\theta h,b+\theta' k) \quad (2)$$

Dar f''_{xy} este continuă în (a,b), deci funcția:

$$\omega(h,k) = f''_{xy}(a+\theta h,b+\theta' k) - f''_{xy}(a,b) \quad (3)$$

are limita în origine:

$$\lim_{h,k\to 0} \omega(h,k) = 0 . \tag{4}$$

Fie $\alpha(h) = \lim_{k\to 0} \omega(h,k)$. (5)

Desigur, din (4) şi (5) rezultă că:

$$\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0 . \tag{6}$$

Înmulțind egalitatea (1) cu $\frac{1}{k}$ şi înlocuind $F(h,k)$ din (2) şi $f''_{xy}(a+\theta h, b+\theta' k)$ din (3) obținem:

$$hf''_{xy}(a,b) + h\omega(h,k) = \frac{1}{k}[f(a+h,b+k) - f(a+h,b)] - \frac{1}{k}[f(a,b+k) - f(a,b)]. \tag{7}$$

Deoarece pe V există derivata parțială f'_y, trecând la limită pentru $k \to 0$ în (7) şi ținând seama de (5) avem:

$$hf''_{xy}(a,b) + h\alpha(h) = f'_y(a+h,b) - f'_y(a,b), \text{ sau:}$$

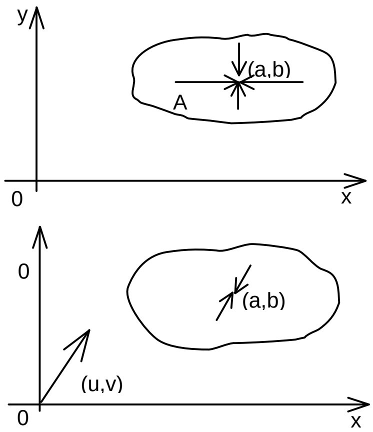
$$\frac{1}{h}[f'_y(a+h,b) - f'_y(a,h)] = f''_{xy}(a,b) + \alpha(h). \tag{8}$$

Trecând la limită în (8) pentru $h \to 0$, din (6) rezultă că există $f''_{yx}(a,b)$ şi $f''_{yx}(a,b) = f''_{xy}(a,b)$.

Consecință. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime deschisă. Dacă $f \in C^2(A)$, atunci derivatele mixte de ordinul doi sunt egale pe A (numărul lor fiind C_p^2 pentru $p \geq 2$).

B. DERIVATE DUPĂ VECTORI

Am văzut că derivata parțială a unei funcții în raport cu variabila x_i presupune existența limitei (*) (definiția2). În acest context vectorul $a + te_i$ tinde la $a \in \mathbb{R}^p$ când $t \to 0$. De exemplu în $\mathbb{R}^2$ pentru derivata în (a,b) în raport cu variabila x, $(a+t,b)$ tinde (când $t \to 0$) la (a,b) de-a lungul unei drepte paralele cu Ox. Fie $(u,v) \neq (0,0)$. Atunci punctul de coordonate $(a+tu, b+tv)$ tinde la punctul de coordonate (a,b) (când $t \to 0$) de-a lungul unei drepte paralele cu vectorul $u\bar{i} + v\bar{j}$. Vom generaliza noțiunea de derivată parțială înlocuind vectorul e_i din (*) cu un vector oarecare, introducând conceptul de derivată după un vector (ori o direcție), concept care joacă un rol important în studiul fenomenelor electromagnetice.



Definiția 4. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ o funcție vectorială, $a \in \overset{\circ}{A}$ şi $v \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ un vector. Dacă există

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t\in \mathbb{R}}} \frac{1}{t}[f(a+tv) - f(a)] \in \mathbb{R}^q \tag{**}$$

spunem că f este *derivabilă în* a *după (în raport cu) vectorul* v. Limita (**), dacă există, se notează $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ şi se numeşte *derivata funcției* f *după (în raport cu) vectorul*

v *în punctul* a. Derivata în a a funcției f după versorul vectorului v (adică după $\frac{1}{\|v\|}v$) se mai numeşte *derivata lui* f *după direcția lui* v.

Observația 1. Dacă $v = e_i \in B_p$ atunci $\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Observația 2. Pentru $p = q = 1$ notând $a + tv = x$, sau $t = \frac{1}{v}(x - a)$ remarcăm că (**) devine:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = vf'(a),$$

deci, în acest caz particular, derivabilitatea după un vector implică derivabilitatea. Invers, dacă f este derivabilă în a şi $v \in$ $\mathbb{R}^*$, luând $vt = x - a$ avem:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{1}{t}[f(a + tv) - f(a)]\frac{1}{v} = \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial v}(a),$$

deci derivabilitatea implică derivabilitatea după orice vector nenul.

Exemplul 6. Derivata după orice vector v nenul a unei aplicații liniare este chiar aplicația respectivă calculată în v. Într-adevăr dacă $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, $a \in \mathbb{R}^p$ şi $v \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ atunci $f(a + tv) - f(a) = tf(v)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Din (**) rezultă că $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f(v)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^p$.

Definiția 5. Fie $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. Numărul real

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{p} x_k y_k = x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p$$

se numeşte *produsul scalar al vectorilor* x *şi* y.

Observație. Produsul scalar are următoarele proprietăți:

(P1) $< x, x >= \|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^p$ şi $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

(P2) $<x,y>=<y,x>, \forall\, x,y \in \mathbb{R}^p$

(P3) $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$

(P4) $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^p$

(P5) $|< x, y >| \le \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^p$ (inegalitatea lui Cauchy-Buniakowsky-Schwarz).

Teorema 2 (*Riesz*). Fie $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Atunci există un unic $a \in \mathbb{R}^p$ astfel încât:

(a) $f(x) =< x, a >$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$

(b) $\|A\| = \|a\|$, unde A este matricea aplicației liniare f.

Demonstrație. Fie $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. Atunci:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i) =< x, a >,$$

unde $a = (f(e_1), \ldots, f(e_p)) \in \mathbb{R}^p$.

Dacă există $b=(b_1,...,b_p)\in$ I**R**^{p} astfel ca: $f(x)=<x,b>$, pentru orice $x\in$ I**R**^{p}, atunci $<e_i,b>=<e_i,a>$, pentru orice $i=\overline{1,p}$, deci $b_i=a_i, i=\overline{1,p}$ adică $b=a$ şi punctul (a) este demonstrat. Desigur A^{τ}=a, deci (b) este, de asemenea, dovedit.

Vom da în continuare un set de condiții suficiente pentru derivabilitatea după un vector şi formula de calcul a derivatei după un vector.

Teorema 3 *(Condiții suficiente de derivabilitate)*. Fie f : A ⊂ I**R**^{p}→ I**R**^{q} şi a∈Å. Dacă există o vecinătate $V\in\mathcal{V}_a$ astfel ca f să aibă derivate parțiale pe V, continue în a, atunci f este derivabilă după orice vector v∈ I**R**^{p} \{0} şi:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i\ ,$$

unde v = (v_1, …, v_p).

Demonstrație. Fie t∈ I**R*** astfel ca $a+tv\in V$. Atunci:

$$\begin{aligned}f(a+tv)-f(a)&=f(a_1+tv_1,a_2+tv_2,...,a_p+tv_p)-f(a_1,a_2+tv_2,...,a_p+tv_p)+\\&+f(a_1,a_2+tv_2,a_3+tv_3,...,a_p+tv_p)-f(a_1,a_2,a_3+tv_3,...,a_p+tv_p)+...+\\&+f(a_1,a_2,...,a_{p-1},a_p+tv_p)-f(a_1,a_2,...,a_{p-1},a_p).\end{aligned}\tag{1}$$

Cum f este derivabilă parțial pe V, aplicând teorema lui Lagrange pe intervalele $[a_k,a_k+tv_k]$, $k=\overline{1,p}$, pentru cele p diferențe din (1) rezultă existența elementelor $c_k(t)\in(a_k,a_k+tv_k), k=\overline{1,p}$, astfel ca:

$$\begin{aligned}f(a+tv)-f(a)&=tv_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1(t),a_2+tv_2,...,a_p+tv_p)+\\&+tv_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+tv_1,c_2(t),a_3+tv_3,...,a_p+tv_p)+...+tv_p\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2,a_3,...,a_{p-1},c_p(t))\end{aligned}\tag{2}$$

Din ipoteza teoremei ştim că derivatele parțiale sunt continue în a; înmulțind ambii membri din (2) cu $\frac{1}{t}$ şi trecând la limită cu $t\to 0$, cum $c_k(t)\to a_k, k=\overline{1,p}$, rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(a+tv)-f(a)]=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)v_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)v_p\ ,$$

deci f este derivabilă după vectorul v şi formula de calcul a derivatei este demonstrată.

Definiția 6. Fie f : A⊂ I**R**^{p}→ I**R** o funcție scalară derivabilă parțial în a∈Å. Vectorul:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)e_k$$

se numeşte *gradientul funcției* f *în* a şi se notează grad $f(a)$, sau $\nabla f(a)$ (a se citi “nabla aplicat funcției f în punctul a”). Dacă A=Å şi f este derivabilă parțial pe A; funcția vectorială:

$$\text{grad } f=\nabla f=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}e_k, \nabla f: A\to \mathrm{I}\mathbf{R}^p,\ a\to\nabla f(a)$$

se numeşte *gradientul funcției f*, sau, *operatorul nabla aplicat lui f*.

Dacă $p=2$, $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}$, iar dacă $p=3$, $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$.

Consecința 1. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ verifică ipotezele teoremei 3, atunci $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = <\nabla f, v>$.

Consecința 2. Dacă $A = \mathring{A} \subset \mathbb{R}^p$ şi $f \in C^1(A)$ atunci f este derivabilă după orice vector v nenul pe A şi $\frac{\partial f}{\partial v} = <\nabla f, v>$.

Exemplul 7. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(xe^{x+z}, ye^{x+z}\right)$. Să calculăm derivata lui f în (0,0) după un versor $v=(v_1,v_2)$ care formează un unghi de 30° cu axa Ox. Atunci $v_1 = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $v_2 = \sin 30° = \frac{1}{2}$. Prin urmare $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. În plus: $f'_x(x,y) = \left((1+x)e^{x+y}, ye^{x+y}\right)$, $f'_y(x,y) = \left(xe^{x+y}, (1+y)e^{x+y}\right)$ şi, conform teoremei 3:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(0,1) = v.$$

Observație. Derivabilitatea unei funcții într-un punct după orice vector nenul implică continuitatea acesteia de-a lungul oricărei drepte care trece prin punctul respectiv. Totuşi ea nu implică continuitatea pentru $p > 1$.

Exemplul 8. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$. Funcția f nu este continuă în (0,0) căci $\lim_{x\to 0} f(x, mx^2) = \frac{1}{m}$ pentru $m \in \mathbb{R}^*$, deci nici măcar nu are limită (în raport cu ansamblul variabilelor) în origine. Totuşi ea este derivabilă după orice vector $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, căci pentru $v \neq 0$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f((0,0) + t(u,v)) - f(0,0)\right] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(tu,tv) = \frac{u^2}{v},$$

iar pentru $v = 0$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(tu,0) - f(0,0)\right] = 0.$$

Propoziția 2. Fie $f, g : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $h : A \to \mathbb{R}$ derivabile în $a \in \mathring{A}$ după $v \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. Atunci funcțiile $\alpha f + \beta g$ şi hf sunt derivabile în a în raport cu v şi

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial v}(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial v}(a) + \beta \frac{\partial g}{\partial v}(a),$$

$$\frac{\partial(hf)}{\partial v}(a) = \frac{\partial h}{\partial v}(a) f(a) + \frac{\partial f}{\partial v}(a) h(a).$$

Demonstrație. Trecând la limită când $t \to 0$ în egalitățile:

$$\frac{1}{t}\left[(\alpha f + \beta g)(a+tv) - (\alpha f + \beta g)(a)\right] = \alpha \frac{1}{t}\left[f(a+tv) - f(a)\right] + \beta \frac{1}{t}\left[g(a+tv) - g(a)\right] \quad \text{şi}$$

$$\frac{1}{t}[(hf)(a+tv)-(hf)(a)]=\frac{1}{t}[h(a+tv)-h(a)]\cdot f(a+tv)+\frac{1}{t}[f(a+tv)-f(a)]\cdot h(a),$$

cum $\lim\limits_{t\to 0} f(a+tv)=f(a)$, conform observației precedente, obținem concluziile din text.

Observație. Mulțimea funcțiilor $f : A \subset$ **IR**$^p \to$ **IR**^{q} derivabile în $a\in\mathring{A}$ după v dotată cu operația de adunare a funcțiilor şi cu operația de înmulțire cu scalari din corpul **IR** este, conform propoziției 2, un spațiu liniar peste **IR**.

Definiția 7. Fie $f : A \subset$ **IR**$^p \to$ **IR**^{q}, $a\in\mathring{A}$ şi doi vectori $u,v\in$ **IR**$^p\setminus\{0\}$. Dacă există o sferă $S(a,r)\subset A$ astfel ca f să fie derivabilă dupa v în orice $x\in S(a,r)$,iar functia $\frac{\partial f}{\partial v}$ este dervabilă după vectorul u în punctul a, notăm această derivată:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(a),\ \text{sau}\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a)\ \text{dacă}\ u=v$$

şi o *numim derivată de ordinul doi a funcției* f *în punctul* a *după vectorii* v *şi* u şi spunem că f este *derivabilă de două ori în punctul* a *după vectorii* v *şi* u.

Desigur dacă $v=e_i$ şi $u=e_j$, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial e_i\partial e_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$.

Analog se definesc derivatele de ordin mai mare ca doi în raport cu vectori nenuli din **IR**^{p}.

Observația 1. Dacă $\|v\|=\|u\|=1$ atunci $v_i=\cos\alpha_i, u_i=\cos\beta_i, i=\overline{1,p}$ sunt cosinuşii directori ai versorilor v şi u:

$$v=\cos\alpha_1 e_1+...+\cos\alpha_p e_p\ \text{şi}\ v=\cos\alpha_1 e_1+...+\cos\alpha_p e_p,$$

iar, după teorema 3:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cos\alpha_i,\ x\in S(a,r)\ \text{şi}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(a)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\cos\alpha_i\cos\beta_j\ .$$

Observația 2. Dacă A = $\mathring{A}$ şi $f\in C^2(A)$, atunci, conform teoremei 3, $\frac{\partial f}{\partial v}\in C^1(A)$, pentru orice $v=(v_1,...,v_p)\in$ **IR**$^p\setminus\{0\}$, iar $\frac{\partial f}{\partial v}$ este o funcție derivabilă după orice vector nenul $u=(u_1,...,u_p)\in$ **IR**^{p} şi, în acord cu teorema lui Schwarz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}v_i u_j=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.$$

Exemplul 9. Să arătăm că $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(1,1)=0$, unde $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ şi $v=(1,1)$.

Conform formulei precedente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(1,1)=f''_{x^2}(1,1)+2f''_{xy}(1,1)+f''_{y^2}(1,1),\ \text{iar}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\ \text{şi}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(1,1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$.

C. DIFERENȚIABILITATE

Vom extinde acum noțiunea de diferențiabilitate studiată la funcțiile de o singură variabilă. Reamintim că funcția $f : A \subset$ **IR**→ **IR** este diferențiabilă în $a\in\mathring{A}$ dacă există o aplicație *liniară* $d_a f$ numită diferențiala funcției f în a astfel ca:

$$f(x)=f(a)+d_a f(x-a)+(x-a)\omega(x),\omega(a)=0$$

unde $\omega : A\to$ **IR** este o funcție continuă în a. Mai mult, f este diferențiabilă în a dacă şi numai dacă f este derivabilă în a, iar $d_a f(h)=f'(a)h$, sau, cu notațiile de la definiția 6, $d_a f(h)=\langle\nabla f(a),h\rangle$.

Definiția 8. Fie f : A⊂ **IR**^{p}→ **IR**^{q} şi $a\in\mathring{A}$. O aplicație liniară $d_a f$: **IR**^{p}→ **IR**^{q} se numeşte *diferențiala funcției* f *în punctul* a (în sensul lui Fréchet) dacă:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|x-a\|}[f(x)-f(a)-d_a f(x-a)]=0\in \text{IR}^q,$$

sau, echivalent (notând $x-a=h$)

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\|h\|}[f(a+h)-f(a)-d_a f(h)]=0.$$

În acest că caz spunem că f *este diferențiabilă în* a. Dacă f este diferențiabilă în orice $a\in A$ funcția f se numeşte *funcție diferențiabilă* (pe A).

Observație. Ca şi în cazul $p=q=1$, putem reformula acestă definiție: aplicația $d_a f\in L$ (**IR**^{p}, **IR**^{q}) *este diferențiala funcției* f *în* a dacă există o funcție $\omega : A\to$ **IR**^{q} continuă în a cu $\omega(a)=0$ şi $f(x)=f(a)+d_a f(x-a)+\|x-a\|\omega(x)$ sau echivalent, există o vecinătate $V\in\mathcal{V}_0$ şi o funcție $\omega_0 : V\to$ **IR**^{q}, continuă în O∈ **IR**^{q} astfel ca:

$$f(a+h)=f(a)+d_a f(h)+\|h\|\omega_0(h),(h\in V) \text{ şi } \omega_o(0)=0.$$

Folosirea sintagmei "diferențiala funcției f în a" impune demonstrarea următorei propoziții.

Propoziția 3. Dacă funcția $f : A\subset$ **IR**^{p}→ **IR**^{q} este diferențiabilă în $a\in\mathring{A}$ atunci diferențiala sa în acest punct este unică.

Demonstrație. Să presupunem că $d_a f$ şi $d'_a f\in L$ (**IR**^{p}, **IR**^{q}) sunt diferențiale ale funcției f în a.
Atunci:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}[d'_a f(h)-d_a f(h)]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}[f(a+h)-f(a)-d_a f(h)-(f(a+h)-f(a)-d'_a f(h))]=0 \quad (1)$$

Luând în (1) $h=te_k, t>0$, unde $\{e_1,e_2,...,e_p\}$, este baza canonică din **IR**^{p} obținem:

$$0=\lim_{t\to o}\frac{1}{t}[d'_a f(te_k)-d_a f(te_k)]=d'_a f(e_k)-d_a f(e_k), \quad \text{adică}$$

$$d'_a f(e_k)=d_a f(e_k), k=\overline{1,p}.$$

Prin urmare cele două aplicații liniare coincid: $d'_a f=d_a f$.

Exemplul 10: Fie f : **IR**^{p} → **IR**^{q} o aplicație liniară şi a∈ **IR**^{p} . Atunci

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}\left[f(a+h)-f(a)-f(h)\right]=0$, deci f este diferențiabilă şi $d_a f = f$, pentru orice a∈ I**R**^{p}.

Prin urmare orice aplicație liniară este diferențiabilă şi diferențiala ei este chiar aplicația liniară respectivă. În particular, dacă g : A ⊂ I**R**^{p} → I**R**^{q} este diferențiabilă în a∈Å, cum $d_a g \in L($ I**R**^{p}, I**R**$^q)$ rezultă că: $d_b(d_a g) = d_a g, \forall b \in$ I**R**^{p}.

Ne punem acum problema de a găsi o formulă de calcul (în caz de existență) pentru $d_a f$. Am văzut că dacă $p = q = 1$, şi f este derivabilă în a, atunci $d_a f(v) = \langle \nabla f(a), v\rangle$. Este această formulă valabilă şi pentru $p > 1$(desigur $q = 1$) în caz că există $\nabla f(a)$? Existența derivatelor parțiale în a(care asigură existența grad f(a)) este suficientă pentru ca f să fie diferențiabilă în a? Pentru a răspunde la aceste întrebări vom începe prin a prezenta câteva *condiții necesare de diferențiabilitate a* unei funcții într-un punct precum şi *formula de calcul a diferențialei într-un punct*.

Teorema 4: Dacă f : A ⊂ I**R**^{p} → I**R**^{q} este diferențiabilă în a∈Å atunci:

(a) f este continuă în a

(b) f este derivabilă după orice v∈ I**R**^{p} \{0} şi $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = d_a f(v)$.

(c) $d_a f(h) = \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k$, pentru orice $h = (h_1, ..., h_p) \in$ I**R**^{p} .

Demonstrație: Fie $d_a f \in L($ I**R**^{p}, I**R**$^q)$ diferențiala funcției f în a.

(a) Deoarece $d_a f$ este diferențiala lui f în a rezultă că există $\omega : A \to$ I**R**^{q}, continuă în a, cu $\omega(a) = 0$ şi $f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \|x-a\|\omega(x), x \in A$. Dar $d_a f$ este o funcție uniform continuă (vezi exercițiul 24 cap.1), iar $d_a f(0) = 0$ deci, trecând la limită când $x \to a$ în această egalitate obținem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; prin urmare f este continuă în a.

(b) Fie v ∈ I**R**^{p} \{0} . Din ipoteză rezultă că

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|}\left[f(a+h)-f(a)-d_a f(h)\right]=0. \tag{1}$$

Punând $h = tv$, cu t∈ I**R*** , cum $h \to 0 \in$ I**R**^{p} rezultă $t \to 0$,iar din (1) obtinem:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{|t|\cdot\|v\|}\left[f(a+tv)-f(a)-d_a f(tv)\right]=0,$$

sau, echivalent:

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|t|}\left[f(a+tv)-f(a)-td_a f(v)\right] = \lim_{t \to 0} \frac{t}{|t|}\left\{\frac{1}{t}\left[f(a-tv)-f(a)\right]-d_a f(v)\right\}, \text{ de unde:}$$

$$\lim_{t \to 0} \left\|\frac{1}{t}\left[f(a+tv)-f(a)\right]-d_a f(v)\right\| = 0. \tag{2}$$

Dar funcția normă este continuă; atunci din (2) obținem:

$$\lim_{t \to a} \frac{1}{t}\left[f(a+tv)-f(a)\right] = d_a f(v), \text{ sau } \frac{\partial f}{\partial v}(a) = d_a f(v).$$

(c) Fie $h = h_1 e_1 + ... + h_p e_p \in$ I**R**^{p}. Din liniaritarea funcției $d_a f$ şi din (b) obținem:

$$d_a f(h) = \sum_{k=1}^{p} h_k d_a f(e_k) = \sum_{k=1}^{p} h_k \frac{\partial f}{\partial e_k}(a) = \sum_{k=1}^{p} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

Exemplul 11: Fie f : I**R**^{2}→ I**R**, $f(x,y) = x^2 + y$ şi $a = (0,0) \in$ I**R**^{2}. Cum $f \in C^\infty$ (I**R**^{2}), deci condiţiile necesare din teoremă sunt îndeplinite, dacă f este diferenţiabilă în a atunci funcţia liniară

$$L(h,k) = f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)k = k, \forall (h,k) \in \text{IR}^2.$$

trebuie să fie diferenţiala funcţiei f în (0,0). Să studiem diferenţiabilitatea funcţiei f în a cu definiţia 8:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[f[(0,0)+(h,k)] - f(0,0) - L(h,k)\right] = \lim_{h,k\to 0} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[h^2 + k - k\right] =$$

$$= \lim_{h,k\to 0} \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

deoarece : $0 \le \dfrac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \dfrac{h^2}{|h|} = |h| \to 0$; prin urmare $d_{(0,0)}f(h,k) = L(h,k) = k.$

Observaţie: Condiţia (a) (respectiv condiţia (b)) din teorema 4 este doar condiţie necesară pentru diferenţiabilitate, nu şi suficientă, după cum arată urmatoarele exemple:

Exemplul 12: Funcţia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y) \ne (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ este continuă în $(0,0)$ căci dacă trecem la coordonate polare $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ avem $x,y \to 0 \Leftrightarrow \rho \to 0$ şi: $0 \le |f(x,y)| \le \rho|\sin\varphi\cos\varphi| \le \rho \to 0$, adică, $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0).$

De asemenea f este derivabilă parţial în (0,0) şi:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 = f'_y(0,0).$$

Dacă f ar fi diferenţiabilă în origine, atunci conform teoremei 4 funcţia liniară:

$$L(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0$$

trebuie să fie diferenţiala funcţiei f în (0,0). Totuşi f nu este diferenţiabilă în (0,0) căci funcţia

$$\omega(x,y) = \frac{1}{\|(x,y)\|}\left[f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \ , \ (x,y) \ne (0,0),$$

nu are nici măcar limită în (0,0). Arătaţi printr-o altă metodă că f nu este diferenţiabilă în origine!

Exemplul 13: Funcţia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}, & y \ne 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$ este derivabilă după orice vector nenul, dar nu este diferenţiabilă în (0,0).

Într-adevăr, dacă w =(u,v) $\in$ I**R**^{2} \{(0,0)}

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(tu,tv) - f(0,0)\right] = \frac{u^2}{v}, \text{ pentru } v \ne 0 \text{ şi pentru } v = 0:$$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[f(tu,0)-f(0,0)\right]=0 .$$

Pe de altă parte, $\lim_{x\to 0} f\left(mx,x^2\right)=m^2$ deci f nu este continuă în (0,0); în acord cu punctul (a) din teorema 4 funcția f nu este diferențiabilă în (0,0). Arătați printr-o altă metodă că f nu este diferențiabilă în origine.

Observație: Dacă A = Å şi f diferențiabilă pe A atunci $f \in C^0(A)$.

Dăm în continuare *condiții suficiente de diferențiabilitate*.

Teorema 5: Fie f : $A \subset$ I**R**$^p \to$ I**R**^{q} şi a$\in$Å. Dacă există $V \in \mathcal{V}_a$ astfel ca f să admită derivate parțiale pe V continue în a, atunci f este diferențiabilă în a.

Demonstrație. Vom arăta, în acord cu teorema 4 (c), că $d_a f(h)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k$, ceea ce înseamnă, conform definiției 8, că ar trebui să dovedim că $\lim_{h\to 0}\omega(h)=0$, unde $\omega(h)=\frac{1}{\|h\|}\left[f(a+h)-f(a)-\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k\right]$. Tehnica pe care o folosim este similară celei utilizată în demostrația teoremei 3 punând h în loc de tv. Mai exact, din existența derivatelor parțiale pe intervalul $[a,a+h]\subset V$, aplicând teorema lui Lagrange, rezultă existența elementelor:

$c_k(h_k)\in\left(a_k,a_k+h_k\right),\quad k=\overline{1,p}$ astfel ca

$$f(a+h)-f(a)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(c_1(h_1),a_2+h_2,...,a_p+h_p\right)+...+h_p\frac{\partial f}{\partial x_p}\left(a_1+h_1,...,a_{p-1}+h_{p-1},c_p(h_p)\right)$$

Să observăm că, dacă $h\to 0\in$ I**R**^{p}, atunci $h_k\to 0$, iar $c_k(h_k)\to a_k, k=\overline{1,p}$ şi:

$$\|\omega(h)\|=\left\|\sum_{k=1}^{p}\frac{h_k}{\|h\|}\left[\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(a_1+h_1,...,a_{k-1}+h_{k-1},c_k(h_k),a_{k+1}+h_{k+1},...,a_p+h_p\right)-\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(a_1,...,a_p\right)\right]\right\|\le$$

$$\sum_{k=1}^{p}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(a_1+h_1,...,a_{k-1}+h_{k-1},c_k(h_k),a_{k+1}+h_{k+1},...,a_p+h_p\right)-\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(a_1,...,a_p\right)\right\|\to 0$$

când $h\to 0$, căci $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ este continuă în a, $k=\overline{1,p}$. Prin urmare $\lim_{h\to 0}\omega(h)=0$, f este diferențiabilă în a şi $d_a f(h)=\sum_{k=1}^{p} f'_k(a)h_k$, pentru orice $h=(h_1,...,h_p)\in$ I**R**^{p}.

Consecință. Dacă $f\in C^1(A)$ atunci f este diferențiabilă pe A.

Exemplul 14. Să calculăm $d_{(0,0)}f(1,1)$ pentru funcția f : I**R**^{2} $\to$ I**R**^{2}, $f(x,y)=\left(x^2+y,e^{x+y}\right)$. Cum $f'_x(x,y)=\left(2x,e^{x+y}\right)$, $f'_y(x,y)=\left(1,e^{x+y}\right)$ şi $f'_x(0,0)=(0,1)$, $f'_y(0,0)=(1,1)$, iar $f\in C^1($ I**R**$^2)$, rezultă că f este diferențiabilă pe I**R**^{2} deci şi în (0,0) şi:

$$d_{(0,0)}f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)u+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v=(0,u)+(v,v)=(v,u+v),\ \text{iar}\ d_{(0,0)}f(1,1)=(1,2).$$

Observație. Condițiile suficiente de diferențiabilitate date la teorema 5 nu sunt şi necesare, după cum dovedeşte următorul exemplu.

Exemplul 15. Funcția $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,x^2+y^2>0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$

este diferențiabilă în $(0,0)$. Într-adevăr, cum :

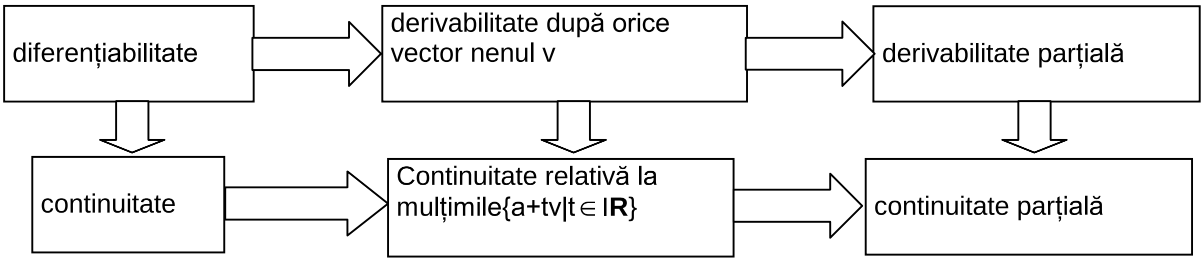
$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f'_y(0,0),\text{ deci dacă există, } d_{(0,0)}f=0.$$

Dar:

$$\omega(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\to 0,\text{ când } x,y\to 0,$$ deci f este diferențiabilă în (0,0).

Pe de altă parte $f\in C^0$ (I**R**^{2}) , admite derivate parțiale pe I**R**^{2} dar ele nu sunt continue în (0,0). Într-adevăr $f'_x(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$, pentru $(x,y)\neq(0,0)$ şi pentru şirul $\left(\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}},\dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)\right)$ care tinde la (0,0) (când $n\to\infty$), $f'_x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}},\dfrac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)=-2\sqrt{n\pi}\to-\infty$, deci, conform teoremei lui Heine, f'_x nu este continuă în (0,0).

Observația 1. Suntem acum în măsură să sintetizăm câteva conexiuni dintre noțiunile introduse. Pentru un punct interior a al domeniului A al funcției f au loc implicațiile:



şi nici una dintre implicații nu este, în general, echivalentă.

Observația 2. În calculul diferențialelor se utilizează pentru proiecțiile pr_k : I**R**^{p}→ I**R** notația $dx_k, k=\overline{1,p}$. Reamintim că $dx_k(h_1,...,h_p)=h_k, \forall h=(h_1,...,h_p)\in$ I**R**^{p}.

În cazul $p=q=1$ $pr_1=dx$ şi: $d_af=\dfrac{df}{dx}(a)dx\in L$ (I**R**, I**R**).

În cazul $p=2$ şi $q=1$, $pr_1=dx$ şi $pr_2=dy$ şi, conform teoremei 4(c):

$$d_{(a,b)}f=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy\in L(\text{ I}\mathbf{R}^2,\text{ I}\mathbf{R}),$$

formulă care reprezintă *diferențiala ca aplicație liniară*. Dacă $(x,y)\in$ I**R**^{2} atunci

$$d_{(a,b)}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,y\in\text{ I}\mathbf{R},$$

formulă care reprezintă *diferențiala funcției* f *în* (a,b) *calculată în* (x,y). Dacă f este diferențiabilă pe A = Å ⊂ I**R**^{2} vom utiliza *diferențiala totală a funcției* f*:*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

şi *operatorul de diferențiere:*

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\ ,$$

operator care asociază unei funcții diferențiabile f diferențiala sa totală df. Notațiile şi formulările precedente se extind pentru orice p, q $\in$ I**N*** :

- *diferențiala lui* f *în punctul* a*:*

$$d_a f = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\,dx_k \in L\ (\,\mathrm{I}\mathbf{R}^p,\ \mathrm{I}\mathbf{R}^q)$$

- *diferențiala lui* f *în punctul* a *calculată în* x=(x_1, …, x_p) *:*

$$d_a f\ (x) = \sum_{k=1}^{p} f'_{x_k}(a)x_k \in\ \mathrm{I}\mathbf{R}^q$$

- *diferențiala totală a lui* f *pe o mulțime deschisă:*

$$d\,f = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}\ dx_k$$

- *operatorul de diferențiere*

$$d = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_k}\ dx_k\ .$$

Să considerăm acum că f = $(f_1,...,f_q)$: A $\subset$ I**R**^{p} $\to$ I**R**^{q} este diferențiabilă în a$\in$Å. Conform teoremei 4 (c):

$$d_a f\ (x) = \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,x_i\ = (\ \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)\,x_i\ ,\ ...\ ,\ \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f_q}{\partial x_i}(a)\,x_i\ ),$$

deci matricea aplicației liniare $d_a f$ $\in$ L (I**R**^{p}, I**R**^{q}) în perechea de baze canonice din I**R**^{p}, respectiv I**R**^{q} este:

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{\substack{i=\overline{1,p}\\ j=\overline{1,q}}}$$

care se numeşte *matricea Jacobi* (sau matricea jacobiană) a funcției f în punctul a. Atunci:

$$\begin{pmatrix} d_a f_1 \\ ... \\ d_a f_q \end{pmatrix} = J_f(a)\begin{pmatrix} dx_1 \\ ... \\ dx_p \end{pmatrix}.$$

Dacă p=q , notăm determinantul matricii jacobiene a funcției f în a :

$$\det J_f(a) = \frac{D(f_1,...,f_p)}{D(x_1,...,x_p)}(a)$$

şi îl numim *jacobianul funcției* f *în punctul* a *sau determinantul funcțional al funcțiilor* $f_1,...,f_p$ *în* a*.*

Formula de calcul a diferențialei indică faptul că unele proprietăți ale operatorilor de derivare parțială $\frac{\partial}{\partial x_k}$, k =$\overline{1,p}$ se transmit operatorului de diferențiere.

Propoziția 4. Fie f,g : A = Å $\subset$ I**R**^{p} $\to$ I**R**, f,g $\in C^1(A)$. Atunci:

(a) d(fg) = gdf + fdg

(b) d(αf + βg) = αdf + βdg, $\forall\alpha,\beta\in$ I**R**

(c) $d\left(\frac{f}{g}\right)= \frac{1}{g^2}$ (gdf - fdg), dacă g(x) $\neq$0, $\forall$x$\in$A

Demonstrație. (a) $d_a(fg) = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial fg}{\partial x_k}(a)\,dx_k = \sum_{k=1}^{p}(f'_{x_k}(a)g(a)+f(a)g'_{x_k}(a))dx_k =$

$= g(a)\sum_{k=1}^{p}f'_{x_k}(a)dx_k + f(a)\sum_{k=1}^{p}g'_{x_k}(a)dx_k = g(a)d_af + f(a)d_ag$, pentru orice $a\in A$, deci $d(fg)=fdg+gdf$.

b) $d_a(\alpha f+\beta g)= \sum_{k=1}^{p}(\alpha f'_{x_k}(a)+\beta g'_{x_k}(a))dx_k =\alpha\sum_{k=1}^{p}f'_{x_k}(a)dx_k +\beta\sum_{k=1}^{p}g'_{x_k}(a)dx_k$

$=\alpha d_af+\beta d_ag$, pentru orice a$\in$A, deci $d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg$.

(c) $d_a\left(\frac{f}{g}\right)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{g^2(a)}[\ f'_{x_k}(a)g(a)-f(a)g'_{x_k}(a)\ ]dx_k=$

$=\frac{1}{g^2(a)}[\ g(a)\sum_{k=1}^{p}f'_{x_k}(a)dx_k - f(a)\sum_{k=1}^{p}g'_{x_k}(a)dx_k\ ] = \frac{1}{g^2(a)}[\ g(a)d_af - f(a)d_ag\ ]$, pentru orice a$\in$A, deci $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}(gdf-fdg)$.

Interpretări geometrice

1. Am văzut că funcția f : A $\subset$ I**R**$\to$ I**R** este diferențiabilă în a$\in$Å dacă şi numai dacă f este derivabilă în a, deci curba de ecuație $y=f(x)$, x$\in$A (care este graficul funcției f) admite o tangentă în punctul $M(a,f(a))$ de ecuație y-f(a) = $=f'(a)(x-a)$, sau , echivalent $y=f(a)+d_af(x-a)$.

2. Dacă f : A= Å $\subset$ I**R**^{2} $\to$ I**R**, f$\in C^1(A)$ şi $(a,b)\in A$ atunci ecuația:

C : f(x,y) – f(a,b) = 0

are ca reprezentare geometrică o curbă care trece prin punctul P(a,b). Să presupunem că această ecuație se poate explicita în funcție de x, adică există o funcție g : B$\subset$ I**R** $\to$ I**R** astfel încât f(x,y) – f(a,b) = y – g(x), x$\in$B. Atunci:

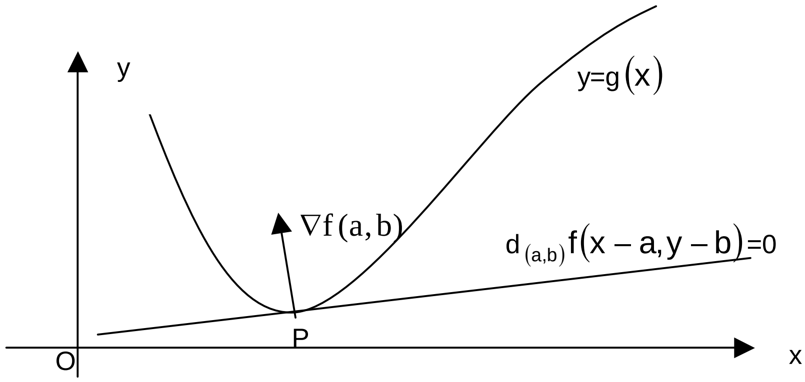
$f'_x(x,y)=-g'(x)$, iar $f'_y(x,y)=1$;

ecuația $d_{(a,b)}f(x-a,y-b)=0$ este echivalentă cu ecuația

$$f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)=-g'(a)(x-a)+y-b=0\ ,$$

sau

$$y-b=g'(a)(x-a)$$



Prin urmare ecuația

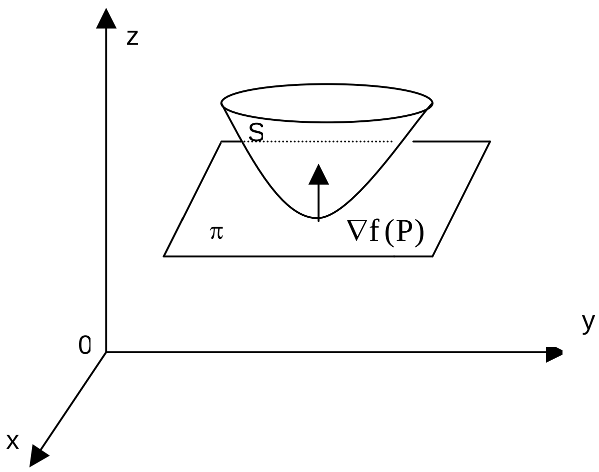
$$d_{(a,b)} f(x-a, y-b)=0$$

este ecuația dreptei tangente la curba C în punctul P de pantă $m=g'(a)= -\dfrac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}$,

iar grad $f(a,b)= -g'(a)\bar{i}+\bar{j}$ este un vector perpendicular pe această dreaptă.

3. Dacă f : A⊂ I**R**$^3 \to$ I**R**, $f\in C^1(A)$ şi $(a,b,c)\in A$ atunci ecuația:

S: $f(x,y,z)=f(a,b,c)$ are ca reprezentare o suprafață ce trece prin P(a,b,c) iar ecuația: $d_{(a,b,c)}f(x-a, y-b, z-c)=0$



sau echivalent:

π: $f'_x(a,b,c)(x-a)+f'_y(a,b,c)(y-b)+f'_z(a,b,c)(z-c)=0$ are ca reprezentare grafică un plan ce trece prin P, este tangent la S şi are ca normală vectorul:

grad f(a,b,c) $=f'_x(a,b,c)\bar{i}+f'_y(a,b,c)\bar{j}+f'_z(a,b,c)\bar{k}$.

4. Să considerăm acum f : A⊂ I**R**$^2 \to$ I**R**, $f\in C^1(A)$. Atunci graficul funcției f este o suprafață de ecuație

S : z = f(x,y), $(x,y)\in A$,

suprafață care admite un plan tangent în $P_0(a,b,f(a,b))$ $((a,b)\in A)$ de ecuație:

$$\pi:\ z-f(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)=d_{(a,b)}f(x-a,y-b)$$

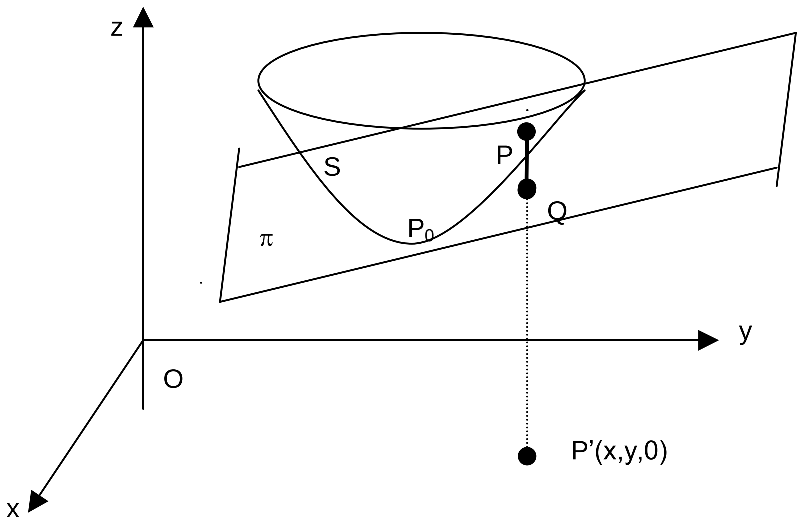
Fie acum $P(x,y,f(x,y)) \in S$ şi PP' dreapta dusă prin P, paralelă cu Oz. Atunci Q(x,y, $f(a,b) + d_{(a,b)}f(x-a, y-b)$) $\in$PP', iar distanța de la P la Q este :

$$d(P,Q) = |(f(x,y) - f(a,b) - d_{(a,b)}f(x-a, y-b)|.$$

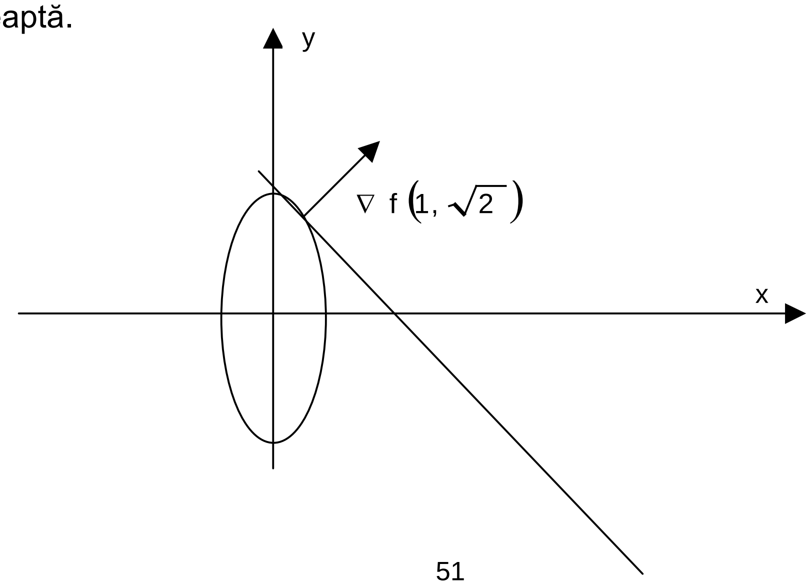
Prin urmare relația de aproximare:

$$f(x,y) \cong f(a,b) + d_{(a,b)}f(x-a, y-b)$$

este echivalentă cu d(P,Q)$\cong$0; deci, dacă P este "suficient de aproape" de P_0, atunci punctul $P \in S$ este "aproape" de punctul $Q \in \pi$ şi valoarea f(x,y) este aproximativ egală cu valoarea în (x-a, y-b) a polinomului de gradul întâi $f(a,b) + d_{(a,b)}f$.



Exemplul 16 . Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$. Ecuația $f(x,y) = f(1, \sqrt{2})$, sau echivalent: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ are ca reprezentare grafică o elipsă de semiaxe $\sqrt{2}$ şi 2, iar ecuația: $d_{(1,\sqrt{2})} f(x-1, y-\sqrt{2}) = 0$, este echivalentă cu $\sqrt{2}(x-1) + \sqrt{2}(y - \sqrt{2}) = 0$, sau cu ecuația $x + y = \sqrt{2} + 1$ şi are ca reprezentare o dreaptă de pantă m = -1 tangentă la elipsă în $P(1,\sqrt{2})$; vectorul grad $f(1, \sqrt{2}) = \sqrt{2}\ ((\bar{i} + \bar{j})$ este perpendicular pe această dreaptă.



Exemplul 17. Ecuația f(x, y, z) = f $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$, unde

f (x, y, z) = $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$ are ca reprezentare grafică elipsoidul de ecuatie $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ (de semiaxe 1, 2 şi 3), iar ecuația :

$$d_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)} f\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}, y - \frac{2}{\sqrt{3}}, z - \sqrt{3}\right) = 0, \text{ sau}$$

$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(z - \sqrt{3}\right) = 0$, reprezintă un plan tangent la elipsoid în $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$; grad $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\bar{k}$ este un vector perpendicular pe acest plan.

Exemplul 18. Dacă $f : (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbf{IR} \times \mathbf{IR} - \{(0,0)\}$, $f(\rho,\sigma) = (x,y)$, unde $x = \rho\cos\sigma$ şi $y = \rho\sin\sigma$, este funcția care realizează trecerea la coordonatele polare, atunci:

$$J_f(\rho,\sigma) = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\rho\sin\sigma \\ \sin\sigma & \rho\cos\sigma \end{pmatrix}, \text{ iar } \quad \frac{D(x,y)}{D(\rho,\sigma)} = \rho.$$

Desigur f este inversabilă şi $f^{-1}(x,y) = (\rho,\sigma)$, unde $\rho = \sqrt{x \ \ + y^2}$ şi $\sigma = \text{Arctg}\frac{y}{x}$. Atunci :

$$J_{f^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \text{ iar } \quad \frac{D(\rho,\sigma)}{D(x,y)} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{1}{\rho}.$$

D. DIFERENȚIALELE ŞI DERIVATELE FUNCȚIILOR COMPUSE

În continuare vom arăta că, în caz de diferențiabilitate, diferențiala compusei a două funcții compozabile este compusa diferențialelor celor două funcții.

Teorema 6. Dacă funcția $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to B \subset \mathbf{IR}^q$ este diferențiabilă în $a \in \mathring{A}$, iar $g : B \to \mathbf{IR}^r$ este diferențiabilă în $b = f(a) \in \mathring{B}$, atunci $g \circ f : A \to \mathbf{IR}^r$ este diferențiabilă în a şi :

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f$$

Demonstrație. Deoarece f este diferențiabilă în $a \in \mathring{A}$ există $\alpha : A \to \mathbf{IR}^q$ astfel ca:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \text{ şi } f(x)=f(a)+d_a f(x-a)+\|x-a\|\cdot\alpha(x) \tag{1}$$

Cum g este diferențiabilă în b=f(a)$\in \overset{\circ}{B}$ există $\beta : B \to IR^r$ astfel ca:

$$\lim_{x\to b}\beta(x)=0 \text{ şi } g(y)=g(b)+d_b g(y-b)+\|y-b\|\cdot\beta(y) \tag{2}$$

Punând în (2) y=f(x), din (1) rezultă că:

$$g\circ f\,(x)= g\circ f\,(a)+d_b g\,\left[d_a f(x-a)+\|x-a\|\cdot\alpha(x)\right]+\|d_a f(x-a)+\|x-a\|\cdot\alpha(x)\|\cdot\beta(y)=$$

$= g\circ f\,(a)+d_b g\circ d_a f(x-a)+\|x-a\|\cdot\vartheta(x)$, unde pentru $x\neq a$:

$$\vartheta(x)=\frac{1}{\|x-a\|}\left[\|x-a\| d_b g(\alpha(x))+\|d_a f(x-a)+\|x-a\|\cdot\alpha(x)\|\cdot\beta(y)\right] \tag{3}$$

Mai trebuie să dovedim că $\lim\limits_{x\to a}\vartheta(x)=0$. Folosind inegalitatea triunghiului în (3) obținem:

$$\|\vartheta(x)\|\leq\|d_b g\,((\alpha(x))\|+\frac{1}{\|x-a\|}\|\beta(y)\|\left[\|d_a f(x-a)\|+\|x-a\|\cdot\|\alpha(x)\|\right] \tag{4}$$

Dar $d_a f \in L(IR^p, IR^q)$ şi $d_b g \in L(IR^q, IR^r)$; folosind inegalitatea de la exercițiul 14, cap.1, rezultă că:

$$\|d_a f(x-a)\|\leq\|J_f(a)\|\cdot\|x-a\| \text{ şi } \|d_b g(\alpha(x))\|\leq\|J_g(b)\|\cdot\|\alpha(x)\| \tag{5}$$

Atunci din (4) şi (5) rezultă că:

$$0\leq\|\vartheta(x)\|\leq\|J_g(b)\|\cdot\|\alpha(x)\|+\|\alpha(x)\|\cdot\|\beta(f(x))\|+\|J_f(a)\|\cdot\|\beta(f(x))\|\to 0,$$

pentru $x\to a$ (căci $\alpha(x)\to\alpha(a)=0, \beta(f(x))\to\beta(b)=0$).

Prin urmare $\lim\limits_{x\to a}\vartheta(x)=0$, $g\circ f$ este diferențiabilă în a şi $d_a(g\circ f)=d_{f(a)}g\circ d_a f$.

Consecința 1. $J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a))\cdot J_f(a)$, căci matricea aplicației liniare $d_a(g\circ f)$ este $J_{g\circ f}(a)$, iar matricea aplicației liniare $d_{f(a)}g\circ d_a f$ este produsul $J_g(f(a))\cdot J_f(a)$.

Consecința 2. Dacă p = q = r, $f = (f_1,\dots,f_p)$, $g = (g_1,\dots,g_p)$, iar $g\circ f = (h_1,\dots,h_p)$, atunci:

$$\frac{D(h_1,\dots,h_p)}{D(x_1,\dots,x_p)}(a)=\frac{D(g_1,\dots,g_p)}{D(y_1,\dots,y_p)}(f(a))\cdot\frac{D(f_1,\dots,f_p)}{D(x_1,\dots,x_p)}\cdot(a)$$

Consecința 3. Dacă funcția $f : A \to B$ este inversabilă, iar $f = (f_1,\dots,f_p)$ şi $f^{-1} = (g_1,\dots,g_p)$, cum $d_a 1_{IR^p} = 1_{IR^p}$, rezultă că:

$d_{f(a)}f^{-1} \circ d_a f = 1_{IR^p}$ şi $d_a f \circ d_{f(a)} f^{-1} = 1_{IR^p}$ şi aplicaţia liniară $d_a f \in L(\mathbf{IR}^p, \mathbf{IR}^p)$ este inversabilă; deci matricea J_f (a), este de asemenea inversabilă şi $(d_a f)^{-1} = d_{f(a)} f^{-1}$, $J_{f^{-1}}(f(a)) = (J_f(a))^{-1}$, iar $\frac{D(g_1,\ldots,g_p)}{D(y_1,\ldots,y_p)}(f(a)) = \frac{1}{\frac{D(f_1,\ldots,f_p)}{D(x_1,\ldots,x_p)}(a)}$.

Formulele obţinute ne indică modalitatea de *derivare parţială a funcţiilor compuse*.

Exemplul 19. Fie $h(t) = f(x_1(t),\ldots, x_p(t))$, unde $x_1,\ldots,x_p \in C^1(\mathbf{IR})$ şi $f \in C^1(\mathbf{IR}^p)$. Atunci notând $g(t) = (x_1(t),\ldots,x_p(t)) \in \mathbf{IR}^p$, $t \in \mathbf{IR}$ rezultă că $h = f \circ g$, iar din consecinţa 1, $J_h = J_f J_g$ sau:

$$h' = (f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_p})\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}, \text{ deci}$$

$$\boxed{h' = x'_1\ f'_{x_1} + \ldots + x'_p\ f'_{x_p}}$$

Exemplul 20. Dacă p=2, q=2 şi r=1 şi w(x,y)=g(u(x,y),v(x,y)), unde u, v şi g sunt diferenţiabile, atunci notând f(x,y)=(u(x,y),v(x,y)) rezultă că $w = g \circ f$ şi din consecinţa 1: $J_u = J_g \cdot J_f$. Deci : $\begin{pmatrix} w'_x & w'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_u & g'_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$

Prin urmare:

$$\boxed{w'_x = u'_x g'_u + v'_x g'_v} \quad \text{şi} \quad \boxed{w'_y = u'_y g'_u + v'_y g'_v}$$

În particular, dacă $w(x,y) = g(x^2 + y^2, (x+y)e^{x+y})$, să calculăm $d_{(0,0)}w(1,0)$. Deoarece :

$$d_{(0,0)}w\ (1,0) = w'_x\ (0,0)dx(1,0) + w'_y\ (0,0)dy(1,0) = w'_x\ (0,0)\text{ , iar}$$

$$w'_x\ (x,y) = 2xg'_u\ (x^2 + y^2, (x+y)e^{x+y}) + e^{x+y}(1 + x + y)g'_v\ (x^2 + y^2, (x+y)e^{x+y})$$

rezultă că $d_{(0,0)}w(1,0) = g'_v(0,0)$.

Exemplul 21. Dacă p=2, q=3, r=1 şi h(x,y)=g(u(x,y),v(x,y),w(x,y)), u, v,w şi g diferenţiabile, atunci notând $f(x,y)=(u(x,y),v(x,y),w(x,y)) \in \mathbf{IR}^3$ urmează că $h = g \circ f$ este o funcţie diferenţiabilă şi:

$J_h = J_g \cdot J_f$, adică:

$$\begin{pmatrix} h'_x & h'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_u & g'_v & g'_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \\ w'_x & w'_y \end{pmatrix}.$$

Prin urmare:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial w}} \quad \text{şi} \quad \boxed{\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial w}}$$

Fie, în particular, $h(x,y) = g(x^2 + y^2, x - y, x + y)$ şi $g \in C^1(\mathrm{I}\mathbf{R}^3)$. Să calculăm $d_{(0,1)}h$. Deoarece $d_{(0,1)}h = h'_x(0,1)dx + h'_y(0,1)dy$, iar

$h'_x(x,y) = 2xg'_u(u,v,w) + g'_v(u,v,w) + g'_w(u,v,w)$ şi

$h'_y(x,y) = 2yg'_u(u,v,w) + g'_v(u,v,w) + g'_w(u,v,w)$, unde $u = x^2 + y^2$, v=x-y, w=x+y, atunci:

$d_{(0,1)}h = [g'_v(1,-1,1) + g'_w(1,-1,1)]dx + [2g'_u(1,-1,1) - g'_v(1,-1,1) + g'_w(1,-1,1)]dy$.

În punctul (1,1) această aplicaţie liniară are valoarea:

$d_{(0,1)}h(1,1) = 2[g'_u(1,-1,1) + g'_v(1,-1,1)]$.

Exemplul 22. Fie $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$, unde u,v,g $\in C^2(\mathrm{I}\mathbf{R}^2)$.

Să calculăm $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Conform formulelor cunoscute de la exemplul 20 $f'_x = u'_x g'_u + v'_x g'_v$. Deoarece g'_u şi g'_v sunt funcţii de x şi y prin intermediul funcţiilor u şi v, derivatele parţiale ale acestora se calculează după aceleaşi formule. Prin urmare:

$f''_{xy} = u''_{xy}g'_u + u'_x(g''_{u^2}u'_y + g''_{uv}v'_y) + v''_{xy}g'_v + v'_x(g''_{vu}u'_y + g''_{v^2}v'_y)$,

sau ţinând seama de teorema lui Schwarz:

$f''_{xy} = u''_{xy}g'_u + v''_{xy}g'_v + u'_x u'_y g''_{u^2} + (u'_x v'_y + u'_y v'_x)g''_{uv} + v'_x v'_y g''_{v^2}$.

E. FUNCŢII OMOGENE ÎN SENS EULER.

Vom prezenta aici o aplicaţie a formulelor de derivare ale funcţiilor compuse concretizată în *identitatea lui Euler.*

Definiţia 9. Funcţia f : A$\subset$ I$\mathbf{R}^p \to$ I**R** se numeşte *funcţie omogenă* (*în sens Euler*) *pe* A dacă există m$\in$I**R** astfel încât pentru orice x$\in$A şi t>0 pentru care tx$\in$A:

f(tx) = t^m f(x).

Numărul real m se numeşte *gradul de omogenitate* al funcţiei f. Mai spunem că f *este omogenă de grad* m.

Exemplul 23. Fie f : I$\mathbf{R}^3 \to$ I**R**, f(x, y, z) = $\sqrt[5]{x^3 - 3x^2y + y^3}$. Desigur, pentru orice t > 0, t(x, y, z) = (tx,ty,tz)$\in$ I$\mathbf{R}^3$ şi f(tx, ty, tz) = $t^{3/5}$f(x,y,z), oricare ar fi (x,y,z)$\in$I$\mathbf{R}^3$. Prin urmare funcţia f este omogenă pe I$\mathbf{R}^3$ având gradul de omogenitate m= $\dfrac{3}{5}$.

Exemplul 24. Fie f : A $\subset$ I$\mathbf{R}^2 \to$ I**R**, A ={(x,y)$\in$ I$\mathbf{R}^2$ | x · y > 0} şi f(x,y) = $\ln\dfrac{x}{y}$.

Deoarece pentru orice t > 0 şi (x, y) $\in$ A:

$(tx,ty) \in A$ şi f(tx,ty)=f(x,y)
rezultă că f este omogenă cu gradul de omogenitate m = 0. Să calculăm expresia E = xf'$_x$ + yf'$_y$. Cum f'$_x$(x,y) = $\frac{1}{x}$ şi f'$_y$ (x, y) = - $\frac{1}{y}$ rezultă că E = 0.

Propoziția 5. Fie $f \in C^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^p$, o funcție omogenă cu gradul de omogenitate m. Atunci f'_{x_k} este o funcție omogenă cu gradul de omogenitate m-1, pentru orice $k \in \{1,.....,p\}$.

Demonstrație. Fie t > o pentru care $tx = (tx_1,.....,tx_p) \in A$. Atunci $f(tx_1,.....,tx_p) = t^m f(x_1,....,x_p)$. Aplicând operatorul de derivare parțială $\frac{\partial}{\partial x_k}$, obținem:

$tf'_{x_k}(tx_1,....,tx_p) = t^m f'_{x_k}(x_1,....,x_p)$, deci f'_k este omogenă cu gradul de omogenitate m-1.

Consecință. Dacă funcția $f \in C^n(A)$ este omogenă de grad m, atunci orice derivată parțială de ordin n este o funcție omogenă de gradul m-n.

Propoziția 6. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de clasă C^1. Condiția necesară şi suficientă ca f să fie omogenă de grad m este ca:

$$\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = mf(x),$$

pentru orice x=($x_1,...,x_p$) $\in$ A.

Demonstrație. *Necesitatea*. Presupunem că f este omogenă de grad m. Fie $x = (x_1,...,x_p) \in A$ fixat şi funcțiile definite prin: $y_k(t) = tx_k, k = \overline{1,p}$, $F(t) = f(y_1(t),...,y_p(t))$. Cum f este omogenă de gradul m rezultă că:

$$F(t) = t^m f(x). \tag{1}$$

Desigur $F \in C^\infty(D)$, unde $D = \{t > 0 \mid tx \in A\}$. Din (1) , prin derivare, obținem:

$$F'(t) = \sum_{k=1}^{p} y'_k(t) f'_k(y_1(t),..., y_p(t)) = mt^{m-1}f(x),$$

adică:

$$\sum_{k=1}^{p} x_k f'_{x_k}(tx_1,...,tx_p) = mt^{m-1}f(x) \tag{2}$$

Dar f'_{x_k} este, conform propoziției 5, o funcție omogenă de grad m-1, deci $f'_{x_k}(tx_1,...,tx_p) = t^{m-1}f'_{x_k}(x)$; atunci din (2) urmează că $\sum_{k=1}^{p} x_k f'_{x^k}(x) = mf(x)$.

Suficiența. Presupunem acum că funcția f are proprietatea:

$$\sum_{k=1}^{p} x_k f'_{x^k}(x) = mf(x),\ \forall x = (x_1,..,x_p) \in A \tag{3}$$

Fie x∈A fixat, $D = \{t > 0 \mid tx \in A\}$ şi:

$\varphi: D \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t^{-m} f(tx)$

Desigur φ este derivabilă pe D şi

$$\varphi'(t) = \frac{-m}{t^{m+1}} f(tx) + \frac{1}{t^m}\sum_{k=1}^{p} f'_{x_k}(tx) \cdot x_k . \tag{4}$$

Din (3) şi (4) obţinem:

$$\varphi'(t) = -\frac{m}{t^{m+1}} f(tx) + \frac{1}{t^{m+1}} \sum_{k=1}^{p} t x_k f'_{x_k}(tx) = -\frac{m}{t^{m+1}} f(tx) + \frac{1}{t^{m+1}} \cdot m f(tx) = 0 .$$

Deci există $C \in$ I**R** astfel ca $\varphi(t) = C$, pentru orice $t \in D$. Atunci $C=\varphi(1)= f(x)= t^{-m}f(tx)$, adică: $f(tx) = t^m f(x)$; în consecinţă f este o funcţie omogenă cu gradul de omogenitate m.

Notaţii. Să notăm:

$$\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \text{sau} \quad \left(\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(1)}$$

operatorul de ridicare formală la puterea întâi care ataşează oricărei funcţii f de clasă C^1 pe $A \subset$ I**R**^{p} funcţia:

$$\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Notăm cu:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(2)} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

operatorul de ridicare formală la puterea a II-a care ataşează oricărei funcţii $f \in C^2(A)$ funcţia:

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

şi în general cu:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(n)}, \quad n \in \mathrm{I}\mathbf{N}^*$$

operatorul de ridicare formală la puterea a n-a care ataşează unei funcţii $f \in C^n(A)$ funcţia:

$$\sum_{i_1=1}^{p}\sum_{i_2=1}^{p}\ldots\sum_{i_n=1}^{p} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}}.$$

Observăm că dacă $f \in C^1(A)$ este o funcţie omogenă de gradul m, atunci, conform propoziţiei 6:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(1)} f = mf .$$

Această formulă admite o generalizare pentru funcţii de clasă C^n pe A, pentru orice $n \in$ I**N***.

Teorema 7 (*identitatea lui Euler*). Dacă $f \in C^n(A)$ ($n \in$ I**N***) este o funcţie omogenă de grad $m \in$ I**R** atunci:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(n)} f = m(m-1)\ldots(m-n+1)f \qquad (*)$$

Demonstraţie. Vom arăta identitatea (*) prin inducţie matematică. Pentru n=1 ea este adevărată, conform propoziţiei 6. Acceptăm că (*) este adevărată pentru n-1, deci:

$$g=\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(n-1)} f = m(m-1)\ldots(m-n+2)f \qquad (1)$$

Dar:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(n)} f = \left(\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(1)} g \qquad (2)$$

Din consecința propoziției 5 rezultă că g, care este o combinație liniară a derivatelor parțiale de ordin n-1 ale funcției f, este o funcție omogenă de grad m-n+1; aplicând din nou propoziția 6, din (2) rezultă că:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(n)} f = (m-n+1)g\ ,$$

iar din (1) rezultă (*).

Exemplul 25. Fie $f(x,y,z)=\sqrt{x}\,\ln\frac{x+y}{z}+\sqrt{y+z}$ şi

$$g = xf'_x + yf'_y + zf'_z + x''f''_{x^2} + y^2f''_{y^2} + z^2f''_{z^2} + 2\left(xyf''_{xy} + yzf''_{yz} + zxf''_{zx}\right).$$

Să calculăm g(1,1,1).

Deoarece $f \in C^2((0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty))$ şi $f(tx,ty,tz)=t^{1/2} f(x,y,z)$, pentru orice $t>0$ rezultă că f este o funcție omogenă de grad $m=\frac{1}{2}$. Din teorema precedentă deducem că:

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = \frac{1}{2}f \text{ şi}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} f = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)f\text{, deci:}$$

$$x^2f''_{x^2} + y^2f''_{y^2} + z^2f''_{z^2} + 2\left(xyf''_{xy} + yzf''_{yz} + zxf''_{zx}\right) = -\frac{1}{4}f\,.$$

Prin urmare:

$$g(1,1,1) = \frac{1}{4}f(1,1,1) = \frac{1}{4}\left(\ln 2 + \sqrt{2}\right).$$

F. DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

Fie $f : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}^q$ o funcție diferențiabilă în punctul a∈Å. Diferențiala funcției f în punctul a se mai numeşte *diferențiala de ordinul întâi a funcției* f *în punctul* a*.* Ne propunem aici să introducem, ca în cazul derivatelor parțiale ori a celor după vectori, diferențiale de ordin superior pentru funcția f în punctul a.

Am constatat că derivatele de ordin superior se obțin prin derivarea celor de ordin mai mic. De exemplu, dacă derivata parțială f'_{x_i} este derivabilă în punctul a în raport cu variabila x_j atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

În schimb dacă f este diferențiabilă în a atunci $d_a f$ este o funcție liniară şi $d_b(d_a f) = d_a f$ (vezi exemplul 10) pentru orice $b \in$ I$\mathbf{R}^p$. Prin urmare, în acest context, folosirea sintagmei "derivata derivatei de ordin întâi este derivata de ordinul al doilea" este perfect justificată, pe când – subliniem din nou – în acest context, expresia "diferențiala diferențialei de ordinul întâi este diferențiala de ordinul al doilea" nu are acoperire logică.

Pe de altă parte, dacă f este diferențiabilă pe A putem considera funcția:

$df : A \times \mathrm{I}\mathbf{R}^p \to \mathrm{I}\mathbf{R}^q, (x,h) \to d_x f(h),$

deci funcția care asociază cuplului (x,h) $\in A \times$ I$\mathbf{R}^p$ diferențiala în $x \in A$ a funcției f calculată în $h \in$ I$\mathbf{R}^p$ (adică o funcție de 2p variabile); fixând $h \in$ I$\mathbf{R}^p$ obținem restricția acestei funcții:

$df(h) : A \to \mathrm{I}\mathbf{R}^q, x \to d_x f(h),$

restricție care ne permite să introducem diferențiala de ordinul al doilea a funcției f în a.

Definiția 10. Fie $f : A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p \to \mathrm{I}\mathbf{R}^q$ o funcție diferențiabilă în punctul $a \in A$. Dacă pentru orice $h \in$ I$\mathbf{R}^p$ funcția:

$df(h) : A \to \mathrm{I}\mathbf{R}^q, x \to d_x f(h)$ (*)

este diferențiabilă în a spunem că f *este diferențiabilă de două ori în* a*,* iar diferențiala acestei funcții calculată în $h \in$ I$\mathbf{R}^p$, $d_a(df(h))(h)$ se notează cu $d_a^2 f(h)$; funcția

$d_a^2 f : \mathrm{I}\mathbf{R}^p \to \mathrm{I}\mathbf{R}^q, h \to d_a^2 f(h)$

se numeşte *diferențiala de ordinul al doilea (diferențiala a II –a) a funcției* f *în punctul* a*.*

Teorema 8. Funcția diferențiabilă $f : A \subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p \to \mathrm{I}\mathbf{R}^q$ este diferențiabilă de două ori în punctul $a \in A$ dacă şi numai dacă derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui f sunt diferențiabile în a. În acest caz:

$$d_a^2 f = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j .$$

Demonstrație. 1. Dacă f este diferențiabilă de două ori în punctul a aplicația (*) este diferențiabilă şi pentru $h = e_i$, $i = \overline{1,p}$, adică aplicația $x \to d_x f(e_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ (care este chiar funcția f'_{x_i}) este diferențiabilă în a, conform definiției 10. În plus:

$$d_a(df(h))(k) = d_a\left(\sum_{i=1}^{p} f'_{x_i} h_i\right)(k) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{p} f''_{x_i x_j}(a) h_i\right) k_j, \quad \text{deci:}$$

$$d_a(df(h))(k) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j \qquad (1)$$

pentru orice $h = (h_1,...,h_p)$, $k = (k_1,...,k_p) \in$ I$\mathbf{R}^p$. Punând h=k obținem diferențiala a II–a a funcției f în a calculată în h:

$$d_a^2 f(h) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j \qquad (2)$$

sau folosind funcțiile proiecții $dx_i, i = \overline{1,p}$, cum $dx_i dx_j(h) = dx_i(h) dx_j(h) = h_i h_j, i,j = \overline{1,p}$, din (2) obținem diferențiala a II –a a funcției f în a:

$$d_a^2 f = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j \tag{3}$$

2. Dacă derivatele parțiale de ordinul întâi sunt diferențiabile în a, atunci pentru un h=$(h_1,....,h_p) \in$ I**R**^{p} arbitrar, dar fixat, combinația liniară:

$$df(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p} h_p$$

este de asemenea diferențiabilă în a, adică funcția (*) din definiția 10 este diferențiabilă în a, pentru orice h $\in$ I**R**^{p}; în consecință, f este diferențiabilă de două ori în a.

Observații şi notații. În cazul în care q = 1, formula (1) defineşte o formă biliniară a cărei matrice este:

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=\overline{1,p}}$$

numită *hessiana funcției* f *în punctul* a. În cazul în care f $\in C^2(A)$, conform teoremei lui Schwarz, hessiana funcției f în punctul curent x $\in$ A, $H_f(x)$, este o matrice simetrică şi, în acord cu teoremele 8 şi 5, funcția f este diferențiabilă de două ori în orice x $\in$ A; în acest caz, formula (2) indică faptul că $d_a^2 f$ este o *formă pătratică* pentru orice a $\in$ A (adică un polinom omogen în sens Euler, cu gradul de omogenitate m = 2). Prin abuz de limbaj vom spune că $d_a^2 f$ dată de formula (3) este o *formă pătratică în proiecțiile* $dx_1, ..., dx_p$.

2. Notăm cu:

$$d = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_p} dx_p$$

operatorul de diferențiere care asociază unei funcții diferențiabile f diferențiala sa totală:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p} dx_p .$$

Acest operator ne permite să dăm o regulă formală de calcul a diferențialelor de ordin superior.

Operatorul diferențial de ordinul al doilea:

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_p} dx_p \right)^{(2)} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

reprezintă ridicarea formală la puterea a doua a operatorului d şi asociază unei funcții f $\in C^2(A)$ *diferențiala sa de ordinul al doilea în punctul curent* x $\in$ A:

$$d\ f = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

În general, *operatorul diferențial de ordinul* n $\in$ I**N**:

$$d^n=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial}{\partial x_p}dx_p\right)^{(n)}=\sum_{i_1=1}^{p}...\sum_{i_n=1}^{p}\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_n}}dx_{i_1}...dx_{i_n}$$

înseamnă ridicarea formală la puterea a n-a a operatorului d şi asociază unei funcţii $f \in C^n(A)$ *diferenţiala de ordinul n (diferenţiala a n-a) a funcţiei* f *în punctul curent* $x\in A$, adică:

$$d^n f=\sum_{i_1=1}^{p}....\sum_{i_n=1}^{p}\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_n}}dx_{i_1}...dx_{i_n}\ .$$

Cum proiecţiile $dx_1,...,dx_n$ sunt funcţii liniare, rezultă că:

$$\left(dx_{i_1}....dx_{i_n}\right)(th)=t^n h_{i_1}...h_{i_n}\ \text{şi}\ d_a{}^n f(th)=t^n d_a{}^n f(h),$$

pentru orice $h \in \mathbf{R}^p$ şi orice $t > 0$; deci pentru q = 1 diferenţiala de ordinul n a funcţiei f în punctul $a \in A$ este un polinom omogen în sens Euler în proiecţiile $dx_1,...,dx_p$, cu gradul de omogenitate m = n, sau formă n-ară.

3. Pentru calculul diferenţialelor de ordin superior de multe ori este de preferat să utilizăm o regulă de *calcul formal* care rezultă din definiţia 10 şi teorema 8. De exemplu, dacă $f \in C^2(A)$ obţinem diferenţiala a II-a în punctul curent $x \in A$ astfel:

- calculăm diferenţiala totală df;
- considerăm în df proiecţiile constante (deci $d(dx_i) = 0$, $i=\overline{1,p}$) şi diferenţiem df:

$$d(df)=d\left(\sum_{i=1}^{p}f'_{x_i}dx_i\right)=\sum_{i=1}^{p}\left(df'_{x_i}\right)dx_i=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j=d^2 f\ .$$

Dacă $f\in C^3(A)$ pentru calculul diferenţialei a III-a procedăm la fel: în d^2f considerăm proiecţiile constante şi diferenţiem:

$$d\Big(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j\Big)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\left(df''_{x_i x_j}\right)dx_i dx_j=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}dx_i dx_j dx_k=d^3 f$$

Analog pocedăm pentru calculul diferenţialelor de ordin n>3.

Exemplul 26. Să calculăm $d^2{}_{(0,0)}f$ pentru funcţia $f(x,y)=x^2e^y+y^2e^x$. Cum $d^2 f=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)}f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$, iar $f'_x(x,y)=2xe^y+y^2e^x$, $f''_{x^2}(x,y)=2e^y+y^2e^x$, $f''_{xy}(x,y)=2xe^y+2ye^x$, $f'_y(x,y)=x^2e^y+2ye^x$, $f''_{y^2}(x,y)=x^2e^y+2e^x$, obţinem diferenţiala a II-a în punctul curent: $d^2 f=\left(2e^y+y^2e^x\right)dx^2+4\left(xe^y+ye^x\right)dxdy+\left(x^2e^y+2e^x\right)dy^2$ şi $d^2{}_{(0,0)}f=2\left(dx^2+dy^2\right)$; prin urmare $d^2{}_{(0,0)}f$ este o formă pătratică pozitiv definită.

Exemplul 27. Să calculăm, cu ajutorul procedeului formal descris mai sus $d^n{}_{(1,1)}f(x,y)$ pentru $n\in \mathbf{N^*}$, unde $f(x,y)=x^3+2xy^2-y^2+1$. În diferenţiala totală :

$$df=3x^2dx+2y^2dx+4xy\,dy-2y\,dy$$

considerăm x,y variabile, iar dx, dy constante şi diferenţiem. Obţinem:

$$d^2 f=6xdx^2+4y\,dx\,dy+4y\,dx\,dy+4x\,dy^2-2dy^2=6xdx^2+8ydxdy+(4x-2)dy^2$$

Prin acelaşi procedeu:

$d^3 f=6dx^3+8dxdy^2+4dxdy^2=6dx^3+12dxdy^2$ şi $d^n f=0$, pentru $n\geq 4$. Prin urmare cum dx(x, y) = x şi dy(x, y) = y, rezultă că:

$d_{(1,1)}f(x,y) = 3x + 2y + 4y - 2y = 5x + 2y$, $d^2{}_{(1,1)}f(x,y) = 6x^2 + 8xy + 2y^2$, $d^3{}_{(1,1)}f(x,y) = 6x^3 + 12xy^2$ şi $d^n{}_{(1,1)}f(x,y) = 0$ pentru $n \geq 4$.

Exemplul 28. Să determinăm hessiana funcției f(x, y) = ln (x + y) în punctul curent (x, y) $\in$ I**R**$^*_+$ x I**R**$^*_+$ prin intermediul diferențialei a **II**-a calculată formal. Deoarece : $d^2f = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2$, pentru a determina $H_f(x,y)$ avem nevoie de coeficienții funcțiilor dx^2, $dxdy$ şi dy^2 . Cum $df = \dfrac{dx + dy}{x + y}$, iar $d^2f = -\dfrac{(dx + dy)^2}{(x + y)^2}$ rezultă că: $H_f(x,y) = -\dfrac{1}{(x + y)^2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

G. ELEMENTE DE CALCUL DIFERENȚIAL ÎN TEORIA CÂMPURILOR

Fie spațiul vectorial euclidian I**R**^{3} raportat la sistemul ortogonal de axe Oxyz cu versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (sau I**R**^{2} raportat la sistemul ortogonal de axe Oxy, cu versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$). Reamintim că o funcție f : A $\subset$ I**R**^{3} $\to$ I**R** se numeşte *câmp scalar* (cazul p=3, q=1) iar o funcție vectorială de componente scalare P, Q, R (cazul p=3, q=3) notată $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$: (P, Q, R : A $\to$ I**R**) se numeşte *câmp vectorial* (vezi definiția 14, cap. 1); vom scrie uneori f(x, y, z)=f(M)=f($\bar{r}$), respectiv $\bar{V}$(x, y, z) = $\bar{V}$($\bar{r}$) = $\bar{V}$(M) unde $\bar{r}$ = x$\bar{i}$ + y$\bar{j}$ + z$\bar{k}$ este vectorul de poziție al punctului curent M(x, y, z), (x, y, z)$\in$A; r va desemna norma vectorului $\bar{r}$, adică $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; prin abuz de limbaj şi notație identificăm mulțimea vectorilor din I**R**^{3} cu I**R**^{3}; de asemenea vom scrie uneori M(x, y, z) $\in$A în loc de (x, y, z)$\in$A. Dacă f $\in$ C^1 (A) este un câmp scalar atunci grad f = $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$ este un câmp vectorial asociat câmpului scalar f. În plus notând cu d$\bar{r}$ = dx$\bar{i}$ + dy$\bar{j}$ + dz$\bar{k}$ diferențiala vectorului $\bar{r}$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \nabla f \cdot d\bar{r},$$

adică diferențiala totală a câmpului f este egală cu produsul scalar euclidian dintre gradientul câmpului f şi diferențiala vectorului de poziție. În continuare vom introduce şi alte câmpuri scalare şi vectoriale asociate unor câmpuri şi vom analiza unele proprietăți ale acestora .

Câmpuri scalare

Fie f : A $\subset$ I**R**^{3} $\to$ I**R** un câmp scalar. Un asemenea câmp se mai numeşte *câmp staționar*. (cum ar fi spre exemplu potențialul unui câmp electric, câmpul presiunilor în punctele unei plăci, ori câmpul temperaturilor unui corp). În unele probleme practice se consideră câmpuri scalare de patru variabile x,y,z,t, cea de a patra indicând timpul în punctul M(x,y,z); asemenea câmpuri se numesc *câmpuri nestaționare*. În cele ce urmează vom analiza doar câmpurile staționare.

Definiția 11. Fie $(a,b,c)\in A$. Locul geometric al punctelor M(x,y,z)$\in$A care verifică ecuația:

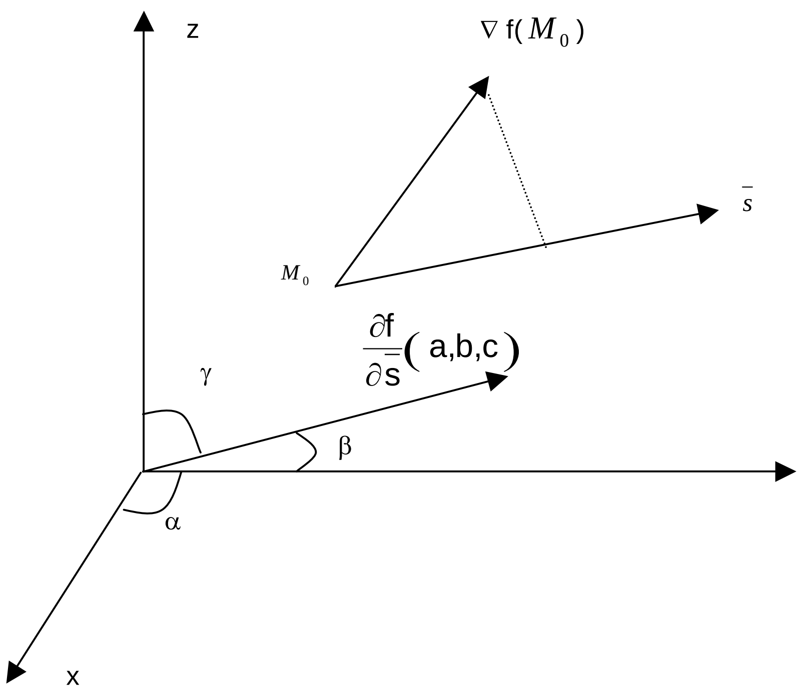
S: f(x,z,y)=f(a,b,c)

se numeşte *suprafața de nivel* (respectiv, pentru p=2, C:f(x,y)=f(a,b) – *curbă de nivel*) care trece prin $M_0(a,b,c)$ (respectiv $M_0(a,b)$)$\in$A$\subset$ I**R**^{2}).

Dacă $\bar{s}=\overline{M_0M_1}$ este un versor, unde $M_1(a_1,b_1,c_1)\in$ I**R**^{3}, iar M(x,y,z) este punctul curent din A situat pe segmentul $(M_0,M]$, atunci limita:

$$l=\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in(M_0M_1]}}\frac{f(M)-f(M_0)}{d(M,M_0)},$$

dacă există, se numeşte *viteza de variație în* M_0 *a câmpului* f *după direcția* $\bar{s}$.



Să remarcăm că dacă versorul $\bar{s}$ are cosinuşii directori cosα, cosβ, cosγ, atunci M(x,y,z)$\in(M_0,M]$, dacă şi numai dacă:

x=a+t cosα, y=b+t cosβ, z=c+t cosγ, d$(M_0,M]$=t şi M $\to M_0 \Leftrightarrow$ t$\to$0. Atunci:

$$l=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f\,(a+t\cos\alpha,\ b+t\cos\beta,\ c+t\cos\gamma)-f(a,b,c)]=\frac{\partial f}{\partial \bar{s}}(a,b,c),$$

deci *viteza de variație a câmpului* f *în* M_0 *după direcția* $\bar{s}$ *coincide cu derivata funcției* f *în* (a,b,c) *după vectorul* $\bar{s}$; vom folosi notațiile

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{s}}(a,b,c)=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\Big)(M_0)=\text{grad } f(M_0)\cdot\bar{s}=\nabla f\cdot\bar{s}\ (M_0).$$

Deoarece în I**R**^{3} produsul scalar dintre doi vectori coincide cu produsul normei unuia dintre vectori cu norma proiecției celuilalt, putem scrie:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{s}}(a,b,c)=\|\text{grad } f(a,b,c)\|\cos\ell\text{, unde } \ell \text{ este unghiul dintre grad } f(a,b,c) \text{ şi } \overline{s}.$$

Dacă $\nabla f(a,b,c)\neq 0$ atunci direcția $\overline{s}$ după care derivata $\frac{\partial f}{\partial \overline{s}}(a,b,c)$ are valoare maximă se obține pentru $\ell=0$:

$$\max_{\overline{s}} \frac{\partial f}{\partial \overline{s}}(a,b,c)=\|\text{grad } f(a,b,c)\|,$$

adică $\overline{s}$ are direcția şi sensul gradientului lui f în (a,b,c); altfel spus *viteza de variație a câmpului* f *în* M_0 *este maximă după direcția gradientului în acest punct..*

Să mai remarcăm că dacă f este diferențiabilă în (a,b,c)$\in$Å atunci ecuația:

$d_{(a,b,c)}f(x-a,y-b,z-c)=\nabla f\ (a,b,c)\cdot d\ \overline{r}\ (x-a,y-b,z-c)=0$ este ecuația planului tangent în $M_0\ (a,b,c)$ la suprafața de nivel ce trece prin M_0, iar gradientul câmpului f în M_0, dacă $\nabla f(a,b,c)\neq 0$, este un vector normal al acestui plan.

Câmpuri vectoriale

Fie $\overline{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\overline{i}+Q(x,y,z)\,\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$ un câmp vectorial $\overline{v}:A\subset \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. Un asemenea câmp (cum ar fi câmpul magnetic, câmpul electric, câmpul vitezelor în punctele unui corp în mişcare etc.) se mai numeşte câmp vectorial staționar.

Definiția 12. Numim *linie de câmp* a câmpului $\overline{v}$ o curbă din A în punctele căruia vectorul $\overline{v}$ este tangent la această curbă.

Exemplul 29. Dacă $\overline{v}$ reprezintă un câmp electric al unei sarcini punctuale, liniile de câmp ale acestuia sunt reprezentate de razele care pornesc din punctul sursă; în cazul câmpului magnetic generat de un magnet, liniile de câmp sunt curbe care pornesc de la un pol la celălalt; liniile de câmp ale câmpului staționar al vitezelor unui fluid aflat în curgere reprezintă traiectoriile de mişcare ale particulelor fluidului (*liniile de curent*).

Observația 1. Fie $\overline{v}=P\,\overline{i}+Q\,\overline{j}+R\,\overline{k}\ :A\subset \mathbb{R}^3\to \mathbb{R}^3$ şi Γ : x = x(t) , y = y(t) , z = z(t) , t $\in$ I, o curbă situată în A reprezentată parametric. Conform definiției 12, curba Γ este o linie de câmp dacă funcțiile x, y, z sunt derivabile iar $\overline{T}=x'(t)\overline{i}+y'(t)\overline{j}+z'(t)\overline{k}$ este tangent în punctul M(x(t), y(t), z(t)) la Γ, t $\in$ I, adică : $\overline{v}\times d\overline{r}=\overline{0}$ (*ecuația vectorială a liniilor de câmp*) sau $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ (*ecuațiile diferențiale ale liniilor de câmp*).

Observația 2. Fie $\overline{s}$ un versor şi M_0(a, b, c) $\in$ A. Atunci derivata câmpului $\overline{v}$ în punctul M_0 după direcția $\overline{s}$ este :

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{s}}(M_0)=\frac{\partial P}{\partial \overline{s}}(M_0)\,\overline{i}+\frac{\partial P}{\partial \overline{s}}(M_0)\,\overline{j}+\frac{\partial P}{\partial \overline{s}}(M_0)\,\overline{k}$$

iar în punctul curent al domeniului A, când $\overline{v}\in C^1(A)$:

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{s}}=\frac{\partial P}{\partial \overline{s}}\overline{i}+\frac{\partial P}{\partial \overline{s}}\overline{j}+\frac{\partial P}{\partial \overline{s}}\,\overline{k}$$

sau, folosind operatorul $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{k}$,

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{s}} = (\overline{s} \cdot \nabla)\overline{v}.$$

Definiția 13. Fie $\overline{v} \in C^1(A)$ şi $M_0 \in A$. Scalarul :

$$\operatorname{div}\overline{v}(M_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(M_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(M_0)$$

sau, cu operatorul lui Hamilton, $\nabla\overline{v}(M_0)$, se numeşte *divergența câmpului* $\overline{v} = P\,\overline{i} + Q\,\overline{j} + R\,\overline{k}$ în $M_0 \in A$, iar câmpul scalar definit în punctul curent din A prin :

$\operatorname{div}\overline{v} = \nabla\overline{v} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ se numeşte *divergența câmpului* $\overline{v}$ *pe* A .

Vectorul

$$\operatorname{rot}\overline{v}(M_0) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)(M_0)\,\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)(M_0)\,\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(M_0)\,\overline{k}$$

se numeşte *rotorul câmpului* $\overline{v}$ *în* M_0 , iar câmpul vectorial definit în punctul curent din A prin $\operatorname{rot}\overline{v} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}$ se numeşte *rotorul câmpului* $\overline{v}$ *pe* A . Folosind din nou operatorul “nabla” şi definiția produsului vectorial putem scrie simbolic :

$$\operatorname{rot}\overline{v} = \nabla \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Câmpul vectorial $\overline{v}$ se numeşte *solenoidal* dacă $\operatorname{div}\overline{v} = 0$ pe A; dacă $\operatorname{rot}\overline{v} = \overline{0}$ pe A spunem că $\overline{v}$ este un câmp *irotațional*. Dacă există două câmpuri scalare $\lambda \in C^1(A)$ (λ neconstant) şi $F \in C^2(A)$ astfel ca $\overline{v} = \lambda\,\operatorname{grad} F$ spunem că $\overline{v}$ este un *câmp biscalar*. Menționăm, fără demonstrație, următoarele teoreme:

Teorema 9. Câmpul $\overline{v} \in C^1(A)$ este solenoidal dacă şi numai dacă există $\overline{w} \in C^2(A)$ astfel ca $\overline{v} = \operatorname{rot}\overline{w}$. Câmpul $\overline{w}$ se numeşte *potențial vectorial al câmpului solenoidal* $\overline{v}$.

Teorema 10. Câmpul $\overline{v}$ este irotațional dacă şi numai dacă există un câmp scalar $\varphi \in C^2(A)$ astfel încât $\overline{v} = \operatorname{grad}\varphi$. Câmpul φ se numeşte *potențial scalar al câmpului irotațional* $\overline{v}$.

Observație. A determina câmpul φ este echivalent cu a rezolva sistemul $\varphi'_x = P$, $\varphi'_y = Q$, $\varphi'_z = R$; cum $\overline{v} \cdot d\overline{r} = \operatorname{grad}\varphi \cdot d\overline{r} = d\varphi$, se poate arăta că dacă (a,b,c) $\in$A atunci :

$$\varphi(x,y,z) = \int_a^x P(x,y,z)dx + \int_b^y Q(a,y,z)dy + \int_c^z R(a,b,z)dz + K,$$

unde K este o constantă arbitrară.

Definiția 14. O suprafață generată de linii de câmp ale unui câmp vectorial se numeşte *suprafață de câmp*.

Teorema 11. Fie $\overline{v} \in C^1(A)$. Atunci :

(a) $\overline{v}$ este biscalar dacă şi numai dacă $\overline{v} \cdot \operatorname{rot} \overline{v} = 0$

(b) dacă $\overline{v}$ este biscalar şi $\overline{v} = \lambda \operatorname{grad} F$ atunci suprafețele de ecuații F = k sunt ortogonale pe liniile de câmp.

(c) dacă există o familie de suprafețe S_k ($k \in$ I**R**) ortogonale pe liniile de câmp ale câmpului $\overline{v}$, atunci $\overline{v}$ este irotațional sau biscalar.

Exemplul 30. Vectorul de poziție $\overline{r}$ este irotațional şi $\operatorname{div} \overline{r} = 3$. Într-adevăr :

$$\operatorname{rot} \overline{r} = \nabla \times \overline{r} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overline{0}$$

şi $\operatorname{div} \overline{r} = \nabla \overline{r} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 0$.

Observație. Dacă f, g $\in C^1(A)$ sunt două câmpuri scalare şi $\overline{v}, \overline{w} \in C^1(A)$ sunt două câmpuri vectoriale, regulile de derivare studiate se transmit operatorului ∇ astfel:

(a) $\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) = \nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g = \alpha \operatorname{grad} f + \beta \operatorname{grad} g$

(b) $\operatorname{div}(\alpha \overline{v} + \beta \overline{w}) = \nabla(\alpha \overline{v} + \beta \overline{w}) = \alpha \nabla \overline{v} + \beta \nabla \overline{w} = \alpha \operatorname{div} \overline{v} + \beta \operatorname{div} \overline{w}$

(c) $\operatorname{rot}(\alpha \overline{v} + \beta \overline{w}) = \nabla \times (\alpha \overline{v} + \beta \overline{w}) = \alpha(\nabla \times \overline{v}) + \beta(\nabla \times \overline{w}) = \alpha \operatorname{rot} \overline{v} + \beta \operatorname{rot} \overline{w}$

(d) $\dfrac{\partial}{\partial \overline{s}}(\alpha f + \beta g) = (\overline{s}\nabla)(\alpha f + \beta g) = \alpha(\overline{s}\nabla) f + \beta(\overline{s}\nabla) g = \alpha \dfrac{\partial f}{\partial \overline{s}} + \beta \dfrac{\partial g}{\partial \overline{s}}$

(e) $\dfrac{\partial}{\partial \overline{s}}(\alpha \overline{v} + \beta \overline{w}) = (\overline{s}\nabla)(\alpha \overline{v} + \beta \overline{w}) = \alpha(\overline{s}\nabla)\overline{v} + \beta(\overline{s}\nabla)\overline{w} = \alpha \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{s}} + \beta \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{s}}$

(f) $\operatorname{grad} U(f) = \nabla(U(f)) = U'(f)\nabla f = U'(f) \operatorname{grad} f$

(g) $\operatorname{grad}(f \cdot g) = \nabla(f \cdot g) = f \nabla g + g \nabla f = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$

(h) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{1}{g^2}(g \nabla f - f \nabla g)$, dacă $g(x,y,z) \neq 0$ pe A

(i) $\operatorname{div}(f \overline{v}) = \nabla(f \overline{v}) = (\nabla f)\overline{v} + f(\nabla \overline{v}) = \operatorname{grad} f \cdot \overline{v} + f \operatorname{div} \overline{v}$

(j) $\operatorname{rot}(f \overline{v}) = \nabla \times f \overline{v} = \nabla f \times \overline{v} + f(\nabla \times \overline{v}) = \operatorname{grad} f \times \overline{v} + f \cdot \operatorname{rot} \overline{v}$

pentru orice α, $\beta \in$ I**R**, orice vector $\overline{s} \neq \overline{0}$ şi orice funcție U : B = f(A) $\subset$ I**R**$\to$I**R** , $U \in C^1(B)$.

Regula săgetării (operatorul ∇ aplicat unui produs).

Am văzut că dacă f, g $\in C^1(A)$ atunci:

$$\nabla(f\,g) = g\nabla f + f\,\nabla g.$$

Remarcăm faptul că în urma aplicării operatorului ∇ produsului de câmpuri scalare obținem o sumă ai cărei termeni sunt:

$g\nabla f$, sau $\nabla(f\,g)$, unde g este considerat constant şi

$f\nabla g$, sau $\nabla(f\,g)$, unde f este considerat constant ,

sau, dacă marcăm cu o săgeată câmpul considerat variabil :

$$\nabla(f\,g) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{f}\,g\right) + \nabla\left(f\,\overset{\downarrow}{g}\right).$$

Practic această constatare este aplicabilă oricăror produse (corect definite!) de câmpuri şi este numită *regula săgetării* ; ea ne permite să calculăm, fără a memora, gradientul, divergența, respectiv rotorul unor produse, ținând seama de *dublul caracter al operatorului* $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$: *cel vectorial şi cel diferențial*.

Exemplul 31. Dacă $f, \overline{v}$ sunt câmpuri de clasă C^1, atunci :

$$\nabla(f\,\overline{v}) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{f}\,\overline{v}\right) + \nabla\left(f\,\overset{\downarrow}{\overline{v}}\right) = (\nabla f)\overline{v} + f\,\nabla\,\overline{v},$$

deci $\operatorname{div}(f\,\overline{v}) = (\operatorname{grad} f)\overline{v} + f \operatorname{div}\overline{v}$ şi $\nabla\times f\,\overline{v} = \nabla\times\overset{\downarrow}{f}\,\overline{v} + \nabla\times f\,\overset{\downarrow}{\overline{v}} = \nabla f\times\overline{v} + f(\nabla\times\overline{v})$,

adică $\operatorname{rot}(f\,\overline{v}) = \operatorname{grad} f\times\overline{v} + f\cdot\operatorname{rot}\overline{v}$.

Exemplul 32. Să calculăm divergența şi rotorul câmpului $\overline{v}\times\overline{w}$ unde $\overline{v},\overline{w}\in C^1(A)$. Reamintim că produsul mixt are proprietățile :

$$\overline{a}(\overline{b}\times\overline{c}) = (\overline{a},\,\overline{b},\,\overline{c}) = (\overline{c},\,\overline{a},\,\overline{b}) = -(\overline{b},\,\overline{a},\,\overline{c}).$$

Atunci :

$$\nabla(\overline{v}\times\overline{w}) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{\overline{v}}\times\overline{w}\right) + \nabla\left(\overline{v}\times\overset{\downarrow}{\overline{w}}\right) = \left(\nabla,\overset{\downarrow}{\overline{v}},\overline{w}\right) + \left(\nabla,\overline{v},\overset{\downarrow}{\overline{w}}\right) = \left(\overline{w},\nabla,\overset{\downarrow}{\overline{v}}\right) - \left(\overline{v},\nabla,\overset{\downarrow}{\overline{w}}\right) =$$
$$= \overline{w}(\nabla\times\overline{v}) - \overline{v}(\nabla\times\overline{w}),$$

deci $\operatorname{div}(\overline{v}\times\overline{w}) = \overline{w}\operatorname{rot}\overline{v} - \overline{v}\operatorname{rot}\overline{w}$. Pentru calculul rotorului reamintim că produsul vectorial este anticomutativ, iar dublul produs vectorial verifică regula lui Gibbs : $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = (\overline{a}\cdot\overline{c})\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\cdot\overline{c}$. Atunci :

$$\nabla\times(\overline{v}\times\overline{w}) = \nabla\times\left(\overset{\downarrow}{\overline{v}}\times\overline{w}\right) - \nabla\times\left(\overset{\downarrow}{\overline{w}}\times\overline{v}\right) = (\overline{w}\,\nabla)\overline{v} - (\nabla\,\overline{v})\overline{w} - (\overline{v}\,\nabla)\overline{w} + (\nabla\,\overline{w})\,\overline{v},$$

deci $\operatorname{rot}(\overline{v}\times\overline{w}) = \frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{w}} - (\operatorname{div}\overline{v})\overline{w} - \frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{v}} + (\operatorname{div}\overline{w})\overline{v}$.

Exemplul 33. Dacă $\overline{v},\overline{w}\in C^1(A)$ atunci :

$$\operatorname{grad}(\overline{v}\cdot\overline{w}) = \overline{v}\times\operatorname{rot}\overline{w} + \frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{v}} + \overline{w}\times\operatorname{rot}\overline{v} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{w}} \qquad (*)$$

Într-adevăr, folosind tehnica săgetării, obținem :

$$\nabla(\overline{v}\cdot\overline{w}) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{\overline{v}}\cdot\overline{w}\right) + \nabla\left(\overline{v}\cdot\overset{\downarrow}{\overline{w}}\right) \quad ;$$

folosind regula lui Gibbs :

$$(\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} = \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) + (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$$

rezultă că :

$$\nabla\left(\overset{\downarrow}{\bar{v}}\cdot\bar{w}\right) = \bar{v}\times(\nabla\times\bar{w}) + (\bar{v}\nabla)\bar{w} \quad \text{şi}$$

$$\nabla\left(\bar{v}\cdot\overset{\downarrow}{\bar{w}}\right) = \bar{w}\times(\nabla\times\bar{v}) + (\bar{w}\,\nabla)\bar{v},$$

de unde rezultă formula (*).

Exemplul 34. Să calculăm div(grad f), unde f $\in C^2(A)$. Deoarece $\text{grad} f = \nabla f = f_x'\,\bar{i} + f_y'\,\bar{j} + f_z'\,\bar{k}$ obținem :

$\text{div}(\text{grad} f) = \nabla(\nabla f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, sau $\nabla^2 f = \Delta f$, unde $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ este *operatorul lui Laplace*. Câmpul f se numeşte *armonic* dacă Δf = 0. De exemplu, câmpul electrostatic $f(r) = \dfrac{a}{r}$, unde $a = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon}$, este armonic. Într-adevăr, cum $\text{grad}\ r = \nabla r = \dfrac{\bar{r}}{r}$ şi $\text{div}\,\bar{r} = 3$, avem :

$$\nabla f = -\frac{a}{r^2}\nabla r = -\frac{a}{r^2}\frac{\bar{r}}{r} = -a\frac{\bar{r}}{r^3} \quad \text{şi}$$

$$\Delta f = -a\left[\nabla\left(\overset{\downarrow}{\frac{1}{r^3}}\bar{r}\right) + \nabla\left(\frac{1}{r^3}\overset{\downarrow}{\bar{r}}\right)\right] = -a\left(-\frac{3}{r^4}\frac{\bar{r}}{r}\bar{r} + 3\frac{1}{r^3}\right) = 0.$$

Exemplul 35. Să arătăm că $\bar{R} = b\dfrac{\bar{r}}{r^3}$, unde $b = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon}$ (câmpul electric) este un câmp vectorial solenoidal, irotațional şi armonic.

Deoarece $\text{div}\,\bar{R} = b\left[\nabla\left(\overset{\downarrow}{\frac{1}{r^3}}\bar{r}\right) + \nabla\left(\frac{1}{r^3}\overset{\downarrow}{\bar{r}}\right)\right] = b\left(-\frac{3}{r^4}\frac{\bar{r}}{r}\bar{r} + \frac{3}{r^3}\right) = 0$, câmpul $\bar{R}$ este solenoidal;

$\text{rot}\,\bar{R} = \nabla\times\overset{\downarrow}{\dfrac{b}{r^3}}\bar{r} + \nabla\times\dfrac{b}{r^3}\overset{\downarrow}{\bar{r}} = b\,\nabla\dfrac{1}{r^3}\times\bar{r} = -b\dfrac{3}{r^4}\dfrac{\bar{r}}{r}\times\bar{r} = \bar{0}$, deci câmpul $\bar{R}$ este irotațional. Prin urmare $\Delta\bar{R} = \text{grad div}\,\bar{H} - \text{rot rot}\,\bar{H} = \bar{0}$, deci câmpul $\bar{R}$ este armonic.

H. EXERCIȚII

Exercițiul 1. Să se demonstreze că dacă A, B $\subset \mathrm{I}\mathbf{R}^p$ atunci :

(a) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$

(b) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \text{int}(A \cup B)$

(c) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \text{int}(A \cap B)$

(d) $\text{int}\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$.

Exercițiul 2. Să se determine interiorul mulțimilor:

(a) $[a, b) \subset$ I**R**, unde a < b

(b) {(x,y) $\in$ I**R**^{2} | $x^2 + y^2 \geq 1$ }∩{ (x,y) $\in$ I**R**^{2} | $x^2 + y^2 \leq 2x$ }

(c) $\{(x,y,z) \in$ I**R**^{3}, $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1\}$

(d) { (x,y,z) $\in$ I**R**^{3}|$x^2+y^2+z^2 = 1$} .

Răspuns. (a) (a, b) ; (b) $\{$ (x,y) $\in$ I**R**^{2} $|1 < x^2+y^2 < 2x$ $\}$; (c) {(x,y,z) $\in$ I**R**^{3}, $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} < 1\}$; (d) ϕ .

Exercițiul 3. Să se arate că funcția f : I**R**$^3 \to$ I**R** ,

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2} & , \text{ dacă } \; x^2+y^2+z^2 \neq 0 \\ \\ 0 & , \text{ dacă } \; x = y = z = 0 \end{cases}$$

este derivabilă parțial dar nu este continuă.

Exercițiul 4. Să se arate că dacă f : A = (0, ∞) × (0, 2π) × I**R** → I**R**^{3} , f(ρ, φ, z)= (x, y, z), unde x = aρcosφ , y = bρsinφ, este funcția care realizează trecerea la *coordonate cilindrice generalizate* (a, b $\in$ I**R***), atunci f $\in C^1(A)$ şi $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = ab\rho$.

Exercițiul 5. Să se arate că dacă

f : A = (0, ∞) × (0, 2π) × (0, π) → I**R**^{3} , f(r, φ, θ) = (x, y, z),

unde x = a r cosφ sinθ , y = b r sinφ sinθ , z = c r cosθ (a, b, c $\in$ I**R***) este funcția care realizează trecerea la coordonate sferice generalizate,

atunci $f \in C^1(A)$ şi $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = -\,abc\,r^2 \sin\theta$.

Exercițiul 6. Să se demonstreze că $\frac{\partial^{13} f}{\partial x^5\, \partial y^4\, \partial z^4} = (x - z - 1)e^{x+y+z}$,

unde $f(x,y,z) = (x - z)e^{x+y+z}$.

Exercițiul 7. Să se arate că $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(1,1) = \left(\sqrt{2}, 0\right)$, unde $f(x, y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$, iar $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$.

Exercițiul 8. Să se demonstreze că grad $f(1,1,1) = \frac{1}{5}\left(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}\right)$, unde $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

Exercițiul 9. Să se arate că $\operatorname{grad} f(1,1,1)=2\overline{v}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{v}}(1,1,1)=6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \overline{v}^2}(x,y,z)=6$ şi $\dfrac{\partial^n f}{\partial \overline{v}^n}(x,y,z)=0$ pentru n>2, unde $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ şi $\overline{v}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$.

Exercițiul 10. Să se demonstreze că funcția :

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad x^2+y^2\neq 0\\[2ex] 0 & , \quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

nu este diferențiabilă în (0, 0, 0) şi că $d_{(1,1,1)} f=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(-dx-dy+2dz\right)$.

Exercițiul 11. Să se arate că dacă $f \in C^1(\mathrm{I}\mathbf{R})$, iar $z(x,y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, atunci $y z'_x = x z'_y$.

Exercițiul 12. Să se demonstreze că dacă $f, g \in C^2(\mathrm{I}\mathbf{R})$ şi $h(x,y)=f(xy)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $y\neq 0$, atunci :

$$x h'_x + y h'_y = x y f' \text{ şi } h''_{x^2}+2x h''_{xy}+y h''_{y^2}=2x f'+y(y+3x^2) f''+\frac{1}{y^3}\left(y-x^2\right)g'' .$$

Exercițiul 13. Să se arate că

$$d_{(0,0)} f(1,1)=g'_u(0,0)+g'_v(0,0) \text{ şi } d^2_{(0,0)} f(1,2)=9\, g''_{v^2}(0,0),$$

unde f(x, y) = g(u, v) , u(x, y) = 2x – y , v(x, y) = 2 y – x şi $g \in C^2(\mathrm{I}\mathbf{R}^2)$.

Exercițiul 14. Fie f funcția definită la exercițiul 10. Să se arate că în punctul (1,-1,1) funcția $f'_x + f'_y + f'_z$ ia valoarea $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ iar $f''_{x^2}+f''_{y^2}+f''_{z^2}-2\left(f''_{xy}+f''_{yz}-f''_{zx}\right)$ ia valoarea 0.

Exercițiul 15. Să se demonstreze că

$$d^2_{(0,0)} f(1,0)=2\left[g'_u(0,0,0)+g'_v(0,0,0)+2g''_{w^2}(0,0,0)\right],$$

unde $g \in C^2(\mathrm{I}\mathbf{R}^3)$, f(x,y) = g(u,v,w), $u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)=x^2-2y$ şi $w(x,y)=y^2-2x$.

Exercițiul 16. Fie z = f(u, v) , $f \in C^2(\mathrm{I}\mathbf{R}^2)$, unde $u(x,y)=\dfrac{x}{y}$ şi v(x, y) = xy .

Să se arate că: $d^2_{(1,1)} z(1,1)=2 f'_v(1,1)+4 f''_{v^2}(1,1)$.

Exercițiul 17. Fie $g \in C^2(\mathrm{I}\mathbf{R}^3)$ o funcție omogenă în sens Euler de grad $m=\dfrac{1}{2}$ şi $f(x,y)= g\left(x^2+y^2, \sqrt{x^4+y^4}, \sqrt[4]{x^8+y^8}\right)$.

Să arate că $x f'_x + y f'_y = f$ şi $x^2 f''_{x^2}+2xy f''_{xy}+y^2 f''_{y^2}=0$.

Exercițiul 18. Fie f(x, y, z) = $x^2+y^2+z^2$, M(1, 1, 1) şi $\overline{v}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$.

Să se arate că :

(a) suprafața de nivel care trece prin M admite ca tangente planele de ecuații $x + y + z = \pm 3$

(b) grad f(M) = $2\overline{v}$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{v}}(M) = 6$

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{s}}(M) \le 2\sqrt{3}$, pentru orice versor $\overline{s} = \cos\alpha\,\overline{i} + \cos\beta\,\overline{j} + \cos\gamma\,\overline{k}$

(e) $\Delta f = 6$

(f) rot (grad f) = $\overline{0}$.

Exercițiul 19. Printr-un conductor liniar trece un curent I care determină în jurul său un câmp magnetic de intensitate $\overline{H} = \dfrac{2}{d^2}\,\overline{I} \times \overline{r}$, unde $\overline{I} = I\,\overline{h}$ este vectorul de curent, $\overline{r}$ este vectorul de poziție al punctului M(x, y, z), iar d este distanța de la conductor la M. Să se arate că $\overline{H}$ este un câmp irotațional.

Exercițiul 20. Fie câmpul scalar :

$$f(x,y,z) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz + g(y-x\,,z-x)\,,$$

unde g $\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ şi $\overline{v} = \operatorname{grad}(\overline{a}\,\operatorname{grad} f)$ şi punctul P(1, 1, 1). Se cere :

(a) să se determine g astfel ca $\overline{v} = yz\,\overline{i} + zx\,\overline{j} + xy\,\overline{k}$

(b) să se calculeze $\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{a}}(P)$

(c) să se scrie ecuațiile liniilor de câmp ale câmpului $\overline{v}$

(d) să se arate că $\overline{v}$ este solenoidal, irotațional şi armonic

(e) să se determine potențialul scalar al câmpului $\overline{v}$.

Răspuns: (a) g $\in C^2(\mathbb{R}^2)$; (b) $2\overline{a}$; (c) $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{zx} = \dfrac{dz}{xy}$; (e) $\varphi(x,y,z) = xyz + K$, $K \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 21 . Fie $\overline{v} \in C^2(A)$. Să se arate că :

(a) $\Delta\overline{v} = \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \overline{v}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \overline{v}}{\partial z^2} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\,\overline{v} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\,\overline{v}$

(b) div rot $\overline{v} = 0$.

Exercițiul 22. Să se determine a $\in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{v} = r^a \cdot \overline{r}$ să fie un câmp armonic.

Răspuns. a $\in$ {3, 0}.

Exercițiul 23. Să se arate că următoarele câmpuri sunt biscalare :

(a) $\bar{v} = \left(yz - x^2\right)\bar{i} - xz\,\bar{j} - xy\,\bar{k}$

(b) $\bar{v} = y^2\,\bar{i} + z\,\bar{j} - y\,\bar{k}$

(c) $\bar{v} = (1 + yz)\,\bar{i} + x(z - x)\,\bar{j} - (1 + xy)\,\bar{k}$

(d) $\bar{v} = (2x^2 + 2xy^2 + 2xz^2 + 1)\,\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$

(e) $\bar{v} = z(1 - e^y)\,\bar{i} + xze^y\,\bar{j} + x(1 - e^y)\,\bar{k}$

(f) $\bar{v} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{r})\bar{r} - 2r^2(\bar{a} \times \bar{b})$

unde $\bar{a}$, $\bar{b}$ sunt vectori constanți.

Exercițiul 24. Să se arate că derivata funcției $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0\ , & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$

în orice punct al elipsei de ecuație $2x^2 + y^2 = 1$ după direcția normatei la elipsă în acel punct este nulă.

Exercițiul 25. Să se arate că

$$\bar{v} = yz\left(2x + y + z\right)\bar{i} + zx(x + 2y + z)\,\bar{j} + xy(x + y + 2z)\bar{k}$$

este un câmp irotațional şi să se determine potențialul scalar al acestui câmp.

Răspuns. $\varphi\left(x, y, z\right) = xyz\left(x + y + z\right) + K$.

Exercițiul 26. Să se determine potențialul scalar φ al câmpului gravitațional $\bar{v} = -\dfrac{m}{r^3}\bar{r}$ creat de masa m situată în originea axelor de coordonate şi să se arate că φ este un câmp armonic.

Răspuns . $\varphi\ (r) = \dfrac{m}{r}$.

TRANSFORMĂRI PUNCTUALE

În acest capitolul vom analiza câteva proprietăți fundamentale ale aplicațiilor de clasă C^1 de forma $f = (f_1, \dots, f_q) : A \subset I\mathbf{R}^p \to B \subset I\mathbf{R}^q$ numite ***transformări punctuale***. Am constatat că asemenea funcții – fiind diferențiabile – admit o ***liniarizare locală*** în sensul că într-o vecinătate a unui punct $a \in A$ putem aproxima creşterea $f(x) - f(a)$ cu ajutorul aplicației $d_a f$, adică $f(x) \cong f(a) + d_a f(x-a)$, unde transformarea liniară $d_a f$ am exprimat-o cu ajutorul bazei duale $\{dx_1, \dots, dx_p\} \subset I\mathbf{R}^{p^*}$. Această constatare ne va permite să transmitem unele proprietăți ale aplicațiilor liniare funcției f. De exemplu, vom arăta că dacă r este rangul matricii jacobiene $J_f(a)$ (proprietate care dă informații asupra aplicației liniare $d_a f$) şi $r<q \le p$, atunci într-o vecinătate a punctului a, q – r dintre componentele scalare $f_1, \dots, f_q$ se exprimă cu ajutorul celorlalte r componente (teorema dependenței funcționale).

Toate funcțiile analizate până acum au fost date sub formă explicită, în sensul că pentru orice $x \in A$ unicul $y \in B$ pentru care $f(x) = y$ era prezentat ca rezultatul compunerii unor funcții elementare. Aici vom studia funcții pentru care y nu este dat sub formă explicită ci ca soluția locală – adică în vecinătatea V a unui punct a fixat – a unei ecuații funcționale de forma $g(x, f(x)) = 0$, $x \in V$; vom spune în acest caz că f este *definită implicit* (local!) de ecuația $g(x, y) = 0$. De asemenea vom indica modul în care se pot afla derivatele parțiale în a ale funcției f (fără a cunoaşte forma analitică f(x) !).

Folosind aceste rezultate vom extinde metodele cunoscute de schimbări de variabile pentru funcții de mai multe variabile, metode care vor juca un rol fundamental în calculul integral şi în rezolvarea ecuațiilor diferențiale.

A. TRANSFORMĂRI REGULATE.

Definiția 1. Fie A şi B două mulțimi deschise din $I\mathbf{R}^p$, $p>1$.

(i) O transformare punctuală bijectivă $f : A \to B$ pentru care $f^{-1} \in C^1(B)$ se *numeşte transformare regulată* (*difeomorfism*, sau *izomorfism diferențiabil*); mai spunem că f *realizează (stabileşte) o transformare regulată de la* A *la* f(A)=B.

(ii) Dacă $f : A \to I\mathbf{R}^p$ este o transformare regulată de la A la f(A) (deci A şi f(A) sunt mulțimi deschise, f este injectivă, $f \in C^1(A)$), $f^{-1} \in C^1(f(A))$) spunem că $f = (f_1,\dots,f_p)$ este o *schimbare de coordonate în (pe)* A iar componentele scalare $f_1, \dots, f_p$ poartă numele de *sistem de coordonate în (pe)* A; dacă $x \in A$ atunci numerele $f_1(x), \dots, f_p(x)$ se numesc *coordonatele lui* x în sistemul de coordonate $f_1, \dots, f_p$.

Exemplul 1. Funcția $f : (0, \infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty) \times (0, \infty)$, $f(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ care realizează trecerea de la coordonatele polare ρ, φ la coordonatele carteziene $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ este o transformare punctuală bijectivă de clasă C^1 (deci o schimbare de coordonate), iar inversa sa definită prin

$f^{-1}(x,y)=\left(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$ este de asemenea de clasă C^1, realizând trecerea de la coordonatele carteziene x, y la coordonatele polare ρ, φ. Prin urmare f şi f^{-1} sunt transformări regulate.

Observaţie. În capitolul precedent am constatat (vezi teorema 6 şi consecinţele) că dacă $f \in C^1(A)$ este inversabilă şi $f^{-1} \in C^1(B)$ atunci aplicaţia liniară d_af este inversabilă şi inversa ei este $d_{f(a)}f^{-1}$ (sau, echivalent matricea $J_f(a)$ este inversabilă şi inversa ei este $J_{f^{-1}}(f(a))$, pentru orice $a \in A$. Extindem acest rezultat în *următoarea teoremă.*

Teorema 1 (*de caracterizare a transformărilor regulate*). Fie A, $B \subset \mathbb{R}^p$ două mulţimi deschise şi $f = (f_1, f_2, \dots, f_p) : A \to B$ o aplicaţie bijectivă de clasă C^1. Următoarele afirmaţii sunt echivalente :

(a) f este transformare regulată

(b) $f^{-1} \in C^0(A)$ şi $d_af : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ este izomorfism, pentru orice $a \in A$.

(c) $f^{-1} \in C^0(A)$ şi $\dfrac{D(f_1,\dots,f_p)}{D(x_1,\dots,x_p)}(a) \neq 0$, pentru orice $a \in A$.

Demonstraţie. Desigur (b) $\Leftrightarrow$ (c), căci $J_f(a)$ este matricea aplicaţiei liniare d_af în baza canonică din $\mathbb{R}^p$, iar d_af este izomorfism dacă şi numai dacă matricea sa este nesingulară. De asemenea (a) $\Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c), conform teoremei 6, cap.2. Rămâne să dovedim :

(b) $\Rightarrow$ (a). Cum $f^{-1} \in C^0(A)$, trebuie să mai demonstrăm că f^{-1} admite derivate parţiale continue. Fie $a \in A$ şi $b = f(a)$. Deoarece f este diferenţiabilă în a există funcţia ω astfel ca:

$$f(x)-f(a)=d_af(x-a)+\|x-a\|\,\omega(x)\text{, pentru orice } x\in A\text{, iar } \lim_{x\to a}\omega(x)=0. \quad (1)$$

Fie $y = f(x)$; din (1) rezultă că $y-b=d_af(x-a)+\|x-a\|\omega(x)$ şi, aplicând $(d_af)^{-1}$ ambilor membri obţinem:

$$x-a=(d_af)^{-1}(y-b)-\|x-a\|(d_af)^{-1}(\omega(x)). \quad (2)$$

Fie $C=\|(d_af)^{-1}\|$ (vezi exerciţiul 14, cap. 1) şi $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{1}{C}\right)$. Atunci există o vecinătate U a punctului a astfel ca: $\|(d_af)^{-1}\omega(x)\|\le C\,\varepsilon$, pentru $x \in U$, iar din (2) rezultă că $\|x-a\|\le\|y-b\|\,C+\|x-a\|\,C\,\varepsilon$, sau :

$$\frac{\|x-a\|}{\|y-b\|}\le\frac{C}{1-C\,\varepsilon}\quad,\quad y\neq b. \quad (3)$$

Notând cu $\omega_1(y)=-\dfrac{\|x-a\|}{\|y-b\|}(d_af)^{-1}(\omega(x))$, pentru $y\neq b$ din (3) rezultă că $\lim_{y\to b}\omega_1(y)=0$, iar (2) devine:

$$f^{-1}(y)-f^{-1}(b)=(d_af)^{-1}(y-b)+\|y-b\|\,\omega_1(y),$$

adică f^{-1} este diferențiabilă în b şi $d_b f^{-1} = \left(d_a f\right)^{-1}$, pentru orice b $\in$ B. Conform teoremei 4, cap.2, rezultă că f^{-1} este derivabilă parțial pe B. Dar $J_{f^{-1}}(f(x)) = \left(J_f(x)\right)^{-1}$; determinantul acestei matrici, conform (c), este nenul pentru orice x $\in$ A, iar elementele matricii $J_f(x)$ sunt funcții continue, deoarece f $\in C^1(A)$; prin urmare şi elementele matricii inverse sunt funcții continue; în consecință $f^{-1} \in C^1(B)$.

Observație. Se poate arăta că dacă f este o transformare regulată de clasă C^n atunci şi inversa f^{-1} este de clasă C^n, pentru orice n $\in$ **IN***.

Următoarea teoremă (a cărei demonstrație se bazează pe teorema de punct fix a lui Banach, dar pe care o omitem) prezintă unul dintre rezultatele fundamentale ale analizei funcțiilor de mai multe variabile.

Teorema 2 (*de inversiune locală*). Fie f : A $\subset$ **IR**^{p} $\to$ **IR**^{p} de clasă C^1 şi a$\in$A pentru care matricea jacobiană $J_f(a)$ este nesingulară. Atunci:

(a) există U $\subset$ A o mulțime deschisă astfel ca a $\in$ U şi f(U) să fie de asemenea deschisă în **IR**^{p}.

(b) f realizează o transformare regulată de la U la f(U).

Consecință. Dacă $J_f(a)$ este nesingulară în orice a $\in$ A atunci f(G) este o mulțime deschisă, oricare ar fi mulțimea deschisă G$\subset$A (adică f „transformă deschişi în deschişi”); în plus, dacă a$\in$A, f = (f_1, …, f_p), iar b = f(a), atunci există U$\in\mathcal{V}_a$ şi V$\in\mathcal{V}_b$ astfel încât pentru orice y = (y_1, …, y_p) $\in$ V sistemul de ecuații :

$$f_i(x_1, \ldots x_p) = y_i \text{ , } i = \overline{1,p}$$

să aibă soluție unică în vecinătatea U.

Demonstrație. Fie G $\subset$ A o mulțime deschisă şi b $\in$ f(G); atunci există a$\in$G astfel ca f(a) = b şi, în acord cu teorema de mai sus, există o vecinătate deschisă U$\in\mathcal{V}_a$, U $\subset$ G pentru care f(U) este deschisă, adică b $\in$ f(U) $\subset$ f(G); deci f(G) este o mulțime deschisă.

Pentru cea de a doua parte aplicăm teorema de inversiune locală : există U$\in\mathcal{V}_a$ deschisă, iar f realizează o transformare regulată de la U la V = f(U); aceasta implică exact existența şi unicitatea soluției sistemului considerat.

Exemplul 2. Funcția f : A = (0, ∞) $\times$ (0, 2π) $\times$ (0, π) $\to$ **IR**^{3}, definită prin:

f(r, φ, θ) = (x, y, z), cu $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ are determinantul funcțional $\dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = -r^2 \sin\theta \neq 0$ pe A; prin urmare, conform teoremei de inversiune locală, f este o schimbare de coordonate; în particular f(A) este o mulțime deschisă din **IR**^{3}.

Operatori diferențiali în coordonate curbilinii

Fie în **IR**^{3} reperul ortonormal O, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ şi F : A $\subset$ **IR**^{3} $\to$ **IR**^{3} o schimbare de coordonate în A; notăm (x, y, z) = F(u, v, w), (u, v, w) $\in$ A şi spunem că u, v, w sunt *coordonatele curbilinii* ale punctului M(x, y, z); prin abuz de notație vom scrie că x, y, z sunt componentele scalare ale funcției vectoriale F, deci:

x = x(u, v, w) , y = y(u, v, w) , z = z(u, v, w) , (u, v, w) $\in$ A.

Atunci vectorul de poziție al punctului curent din F(A) este :

$$\bar{r} = x(u, v, w)\,\bar{i} + y(u, v, w)\,\bar{j} + z(u, v, w)\,\bar{k}.$$

Vom presupune că aplicația F defineşte un *sistem ortogonal de coordonate curbilinii* în A, adică vectorii $\bar{r}_u = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u}$, $\bar{r}_v = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v}$, $\bar{r}_w = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial w}$ sunt ortogonali doi câte doi şi formează un reper direct: $\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_w = \bar{r}_w \cdot \bar{r}_u = 0$ şi $\bar{r}_w = \bar{r}_u \times \bar{r}_v$, $\bar{r}_u = \bar{r}_v \times \bar{r}_w$, $\bar{r}_v = \bar{r}_w \times \bar{r}_u$ pe A.

Notăm cu $\bar{e}_u , \bar{e}_v , \bar{e}_w$ versorii vectorilor $\bar{r}_u , \bar{r}_v , \bar{r}_w$; cu H_u, H_v, H_w notăm normele acestor vectorii şi numim aceste funcții *parametrii lui Lamé*. Atunci:

$$\bar{r}_u = H_u \bar{e}_u \quad , \quad \bar{r}_v = H_v \bar{e}_v \quad , \quad \bar{r}_w = H_w \bar{e}_w$$

iar produsul mixt este:

$$(\bar{r}_u , \bar{r}_v , \bar{r}_w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = H_u \cdot H_v \cdot H_w \neq 0 .$$

Se arată că dacă $f \in C^1(A)$ atunci :

$$\text{grad } f = \frac{1}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}\bar{e}_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}\bar{e}_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}\bar{e}_w$$

iar dacă $\bar{v} = P\bar{e}_u + Q\bar{e}_v + R\bar{e}_w$ este un câmp de clasă C^1 pe A :

$$\text{div}\,\bar{v} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(PH_v H_w) + \frac{\partial}{\partial v}(QH_w H_u) + \frac{\partial}{\partial w}(RH_u H_v)\right]$$

$$\text{rot}\,\bar{v} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\begin{vmatrix} H_u\bar{e}_u & H_v\bar{e}_v & H_w\bar{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ H_u P & H_v Q & H_w R \end{vmatrix} ,$$

expresii care definesc gradientul câmpului scalar f, respectiv divergența şi rotorul câmpului vectorial $\bar{v}$.

Exemplul 3. Coordonatele cilindrice ρ, φ, z introduse prin $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, z = z definesc un sistem ortogonal pentru care parametrii Lamé sunt $H_\rho = H_z = 1$ şi $H_\varphi = \rho$; de asemenea coordonatele sferice r, θ, φ introduse prin $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ definesc un triedru ortogonal, iar parametrii Lamé sunt $H_r = 1$, $H_\varphi = r\sin\theta$, $H_\theta = r$.

Exemplul 4. Să calculăm div $\bar{v}$, grad div $\bar{v}$, rot grad div $\bar{v}$ si rot $\bar{v}$, unde $\bar{v} = r\bar{e}_r - r\bar{e}_\varphi + \sin\theta\bar{e}_\theta$ este dat în coordonate sferice.

$$\text{div}\,\bar{v} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^3\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin^2\theta)\right] = 3 + \frac{2\cos\theta}{r},$$

$$\text{grad}\,\text{div}\,\bar{v} = \frac{\partial}{\partial r}\left(3 + \frac{2\cos\theta}{r}\right)\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(3 + \frac{2\cos\theta}{r}\right) = -\frac{2}{r^2}(\cos\theta\,\bar{e}_r + \sin\theta\,\bar{e}_\theta),$$

$$\operatorname{rot}\overline{v} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \overline{e}_r & r\sin\theta\,\overline{e}_\varphi & r\,\overline{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial\theta} \\ r & -r^2\sin\theta & r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\cos\theta\,\overline{e}_r - r\sin^2\theta\,\overline{e}_\varphi - 2r^2\sin\theta\,\overline{e}_\theta,$$

iar $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{v} = \overline{0}$ conform teoremei 10, cap.2.

B. FUNCȚII IMPLICITE

Fie $f : E = A \times B \subset \mathbf{IR}^p \times \mathbf{IR}^q \to \mathbf{IR}^q$, p, q $\in \mathbf{IN}^*$, $A = \overset{\circ}{A}$, $B = \overset{\circ}{B}$ şi $(a,b) \in E$ astfel încât $f(a,b) = 0$. Să presupunem că $f_1, f_2, \dots, f_q$ sunt componentele scalare ale funcției f; dacă $(x,y) \in E$, unde $x = (x_1, \dots, x_p) \in A$ şi $y = (y_1, \dots, y_q) \in B$, vom nota uneori $f(x,y) = f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$.

Definiția 2. Dacă există $U \in \mathcal{V}_a$ şi $V \in \mathcal{V}_b$, $U \subset A$, $V \subset B$ şi $g : U \to V$ astfel încât

$f(x,g(x)) = 0$, pentru orice $x \in U$,

atunci funcția g se numeşte *funcție implicită definită de ecuația* $f(x,y) = 0$ în raport cu variabilele $y_1,\dots,y_q$ pe vecinătatea $U\times V\in\mathcal{V}_{(a,b)}$; uneori vom spune că ecuația $f(x,y)=0$ *defineşte implicit funcția* g (pe $U\times V$).

Observații. Mulțimea soluțiilor ecuației $f(x,y)=0$ în sensul definiției de mai sus este chiar graficul funcției $g : U \to V$. În cazul p=q=1 această mulțime are ca reprezentare geometrică o curbă din $\mathbf{IR}^2$; dacă p=2 şi q=1 graficul funcției g reprezintă o suprafață din $\mathbf{IR}^3$; dacă p=1 şi q=2 graficul funcției g are ca reprezentare geometrică o curbă din $\mathbf{IR}^3$.

Apare astfel necesitatea rezolvării următoarelor *probleme*.

1 Există o funcție implicită g definită de ecuația $f(x,y)=0$?

2 Dacă există o asemenea funcție este ea unică ?

3 În caz de existență este funcția g continuă, derivabilă, etc. ?

Vom răspunde la aceste probleme în cele ce urmează, dând condiții suficiente asupra funcției f pentru ca răspunsurile să fie afirmative, urmând ca în capitolul următor să dăm şi condiții, în cazul q=1, ca funcția g definită de ecuația $f(x,y)=0$ să admită extreme ori să poată fi aproximată cu un polinom. Dar să analizăm mai întâi aceste probleme pe câteva exemple simple.

Exemplul 5. Ecuația $f(x,y)=0$, unde $f : \mathbf{IR} \times \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}$, $f(x,y) = x^3-y+1$ defineşte unic funcția implicită $g : \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}$ în raport cu variabila y, $g(x) = x^3+1$ în orice vecinătate a lui $(a,b)\in \mathbf{IR}^2$ pentru care $f(a,b)=0$; aici $f\in C^\infty(\mathbf{IR}^2)$ şi $g\in C^\infty(\mathbf{IR})$. De asemenea, funcția $h(y) = \sqrt[3]{y-1}$, $h : \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}$ este o funcție definită implicit de ecuația $f(x,y)=0$ în raport cu variabila x pe $\mathbf{IR}^2$; în schimb h este doar de clasă C^0, nefiind derivabilă în y=1. În fine, luând de exemplu (a,b)=(1,2), restricția funcției h la mulțimea $(1,\infty)$ este o funcție implicită definită de ecuația $f(x,y)=0$ în raport cu variabila x pe $(1,\infty) \times \mathbf{IR}$ de clasă C^∞.

Exemplul 6. Fie $f : E=(-1, 1) \times (-1, 1) \to \mathbf{IR}$, $f(x,y)=x^2+y^2-1$. Atunci ecuația $f(x,y)=0$ defineşte implicit o infinitate de funcții în raport cu variabila y; de exemplu

funcțiile $g_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ şi $g_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$, $g_1,g_2 : (-1, 1) \to$ I**R** sunt de clasă C^∞ şi $f(x,g_1(x)) = f(x,g_2(x))=0$, pentru orice $x\in(-1, 1)$, deci ele sunt funcții implicite definite ecuația $f(x,y)=0$ în raport cu variabila y în orice vecinătate inclusă în E a unui punct $(a_1, b_1) \in E$ (respectiv $(a_2, b_2) \in E$) pentru care $g_1(a_1) = b_1$ (respectiv $g_2(a_2) = b_2$).

Dacă fixăm $(a,b)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\in E$ atunci ecuația defineşte o unică funcție implicită de clasă C^∞ în raport cu variabila y pe $E \in \mathcal{V}_{(a,b)}$ şi anume funcția g_1. Funcția

$$g(x)=\begin{cases} g_1(x), & x\in[0,1) \\ g_2(x), & x\in(-1,0)\end{cases}$$ este, de asemenea, definită implicit de ecuația dată, în raport cu y pe E, dar ea nu este nici măcar continuă.

Exemplul 7. Ecuația $x^2 - y^2 = 0$ defineşte pe I$\mathbf{R}^2$ o infinitate de funcții implicite în raport cu y; în schimb pentru $(a,b)=(0,0)$ singurele asemenea funcții *continue pe* I**R** sunt $g_1(x)=x$, $g_2(x)=-x$, $g_3(x)=|x|$ şi $g_4(x)= -|x|$; dintre acestea doar g_1 şi g_2 sunt de clasă C^∞ pe I**R**.

Exemplul 8. Ecuațiile $x^2 + y^2 + z^2 +1=0$ şi $x^2 + y^2 + z^2=0$ nu definesc nici o funcție implicită.

Exemplul 9. Dacă $f(x,y)=|x|-|y|$ iar $(a,b)=(0,0)$, ecuația $f(x,y)=0$ defineşte o infinitate de funcții implicite în raport cu cu variabila y, printre care $g_1(x)=x$, $g_2(x)=-x$, $g_3(x)=|x|$, $g_4(x)= -|x|$, g_k : I**R** $\to$I**R**, $k=\overline{1,4}$; g_1 şi g_2 sunt derivabile iar g_3 şi g_4 nu sunt derivabile (în a=0).

Teorema 3 (*de existență, unicitate şi derivabilitate a funcțiilor implicite*). Fie $f : E = A \times B \subset$ I$\mathbf{R}^p\times$ I$\mathbf{R}^q \to$ I$\mathbf{R}^q$. Dacă:

(i) $f\in C^k(E)$, $k\geq 1$

(ii) $f(a,b)=0$, unde $(a,b)\in E$

(iii) $\frac{D(f_1,...,f_q)}{D(y_1,...,y_q)}(a,b)\neq 0$

atunci există $U\in\mathcal{V}_a$ şi $V\in\mathcal{V}_b$ şi $g=(g_1,...,g_q) : U \to V$ astfel ca

(a) $g\in C^k(U)$

(b) g este funcție implicită definită de ecuația $f(x,y)=0$ în raport cu variabilele $y_1,...y_q$

(c) $g(a)=b$

(d) $$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)=-\frac{\dfrac{D(f_1,...,f_q)}{D(y_1,...y_{i-1},x_j,y_{i+1},...,y_q)}}{\dfrac{D(f_1,...,f_q)}{D(y_1,...,y_q)}}(x,g(x)),\quad x\in U.$$

(e) (*unicitatea*) Dacă $U'\in\mathcal{V}_a$, $V'\in\mathcal{V}_b$ şi $h : U' \to V'$ este o funcție care verifică (a), (b), (c) atunci $g(x)=h(x)$ pentru orice $x \in U\cap U'$.

Demonstrație. Definim funcția

$F(x,y)=(x,f(x,y))= (x_1,...,x_p,f_1(x_1,...,x_p,y_1,..., y_q),..., f_q(x_1,...,x_p, y_1,..., y_q))$.

Atunci $F\in C^k(E)$ şi:

$$J_F(a,b) = \begin{array}{c} \qquad\overbrace{\qquad\qquad}^{p}\ \overbrace{\qquad\quad}^{q} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ f'_{1x_1} & f'_{1x_2} & \dots & f'_{1x_p} & f'_{1y_1} & \dots & f'_{1y_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{qx_1} & f'_{qx_2} & \dots & f'_{qx_p} & f'_{qy_1} & \dots & f'_{qy_q} \end{pmatrix}_{(a,b)} \end{array}$$

Deoarece $\det(J_F(a,b)) = \dfrac{D(f_1,\dots,f_q)}{D(y_1,\dots,y_q)}(a,b) \neq 0$, din teorema de inversiune locală rezultă că există $U=U_1\times U_2\in\mathcal{V}_{(a,b)}$, $U_1\in\mathcal{V}_a$, $U_2\in\mathcal{V}_b$ şi $V=V_1\times V_2\in\mathcal{V}_{F(a,b)}$, $V_1\in\mathcal{V}_0$, $V_2\in\mathcal{V}_0$, căci $F(a,b)=0$, astfel încât restricția $F : U \to V$ este inversabilă şi $F^{-1}=G=(G_1,G_2) : V \to U$ este de clasă C^k pe V.

Fie $g : V_1\to U_2$, $g(x)=G_2(x,0)$. Atunci $g\in C^k(V_1)$, deci (a) este demonstrat.

Cum $(x,y)=F\circ G(x,y)=F(G_1(x,y), G_2(x,y))= (G_1(x,y), f(G_1(x,y), G_2(x,y)))$ rezultă că $G_1(x,y)=x$ şi $f(x, G_2(x,y))=y$; punând $y=0$ urmează că $f(x,g(x))=0$, pentru orice $x\in V_1$, deci (b) este dovedit.

La fel $(x,y)= G\circ F(x,y)= (G_1(x,f(x,y)), G_2(x,f(x,y)))$, de unde $G_2(x,f(x,y))=y$; pentru $x=a$, $y=b$ obținem $G_2(a,f(a,b))=G_2(a,0)=g(a)=b$, deci (c) este probat.

Dacă $U_0= U_1\cap V_1\in\mathcal{V}_a$ şi g_1,g_2 verifică (a),(b),(c) atunci $(x,g_1(x)),(x,g_2(x)) \in U_1\times U_2$, pentru orice $x\in U_0$; din existența lui F^{-1} rezultă:

$F(x,g_1(x)) = (x,f(x,g_1(x)))= (x,f(x,g_2(x)))=(x,0)= F(x,g_2(x))$, deci $g_1(x)= g_2(x)$ pentru orice $x\in U_0$ şi (e) este demonstrat.

Derivând în raport cu x_j ambii membri ai ecuațiilor:

$$f_i(x,g(x))= f_i(x_1,\dots,x_p,g_1(x_1,\dots,x_p),\dots, g_q(x_1,\dots,x_p)),\ i=\overline{1,q}\ ,$$

obținem sistemul liniar în $x\in U_0$ de q ecuații

$$f'_{ix_j} + f'_{iy_1}g'_{1x_j} + \dots + f'_{iy_q}g'_{qx_j} = 0,\ i=\overline{1,q};$$

sau matricial

$$J_f(x,g(x))\cdot\begin{pmatrix} g'_{1x_j} \\ . \\ . \\ . \\ g'_{qx_j} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f'_{1x_j} \\ . \\ . \\ . \\ f'_{qx_j} \end{pmatrix}.$$

Din ipoteza (iii) şi din continuitatea derivatelor parțiale ale funcției f rezultă că există $V'\in\mathcal{V}_{(a,b)}$ astfel ca

$$\frac{D(f_1,\dots,f_q)}{D(y_1,\dots,y_q)}(x,g(x)) \neq 0,$$

pentru orice $x \in V_1 \cap V'$; aplicând regula lui Cramer obținem egalitatea (d) şi teorema este complet demonstrată.

Observație. În condițiile teoremei, pentru $k \geq 2$, formula (d) permite calculul, prin recurență, a derivatelor parțiale de ordin superior.

Vom reformula acum teorema funcțiilor implicite în câteva cazuri particulare.

Cazul p=q=1

Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi deschise.

Consecința 1. Dacă $f : A \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^k, $k \geq 1$ şi există $(a,b) \in A \times B$ astfel ca $f(a,b)=0$, iar $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, atunci există $U \subset A$, $U \in \mathcal{V}_a$, $V \subset B$, $V \in \mathcal{V}_b$ şi o unică funcție $g : U \to V$ astfel ca

(a) $g \in C^k(U)$ şi $f(x,g(x))=0$, pentru orice $x \in U$

(b) $g(a)=b$

(c) $g'(x) = -\dfrac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$, pentru orice $x \in U$ şi $y=g(x)$.

Observație. În condițiile precizate uneori folosim notația $y=y(x)$ pentru funcția g, deci:

$f(x,y(x))=0, \ x \in U$.

Folosind formula de derivare a funcțiilor compuse obținem:

$$f'_x + y' f'_y = 0 \text{ , pe U} \tag{1}$$

deci $y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$ pe U.

Pentru $k \geq 2$ obținem $y'', y''', \ldots$ prin recurență din (1):

$$f''_{x^2} + y' f''_{xy} + y'' f'_y + y'(f''_{xy} + y' f'_{y^2}) = 0$$

$$\text{deci } y'' = -\frac{f''_{x^2} + 2y' f''_{xy} + y'^2 f'_{y^2}}{f'_y} \text{ pe U} \tag{2}$$

etc.

Exemplul 10. Să considerăm ecuația $\mathrm{arctg}(x+y)=\ln(x^2+y^2+1)$ şi să examinăm în ce condiții defineşte ea o funcție implicită $y=y(x)$. Fie $f(x,y)=\mathrm{arctg}(x+y) - \ln(x^2+y^2+1)$. Desigur $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ şi $f'_y(x,y) = \dfrac{1}{1+(x+y)^2} - \dfrac{2y}{x^2+y^2+1}$. Conform teoremei funcțiilor implicite, dacă $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ şi

$\mathrm{arctg}(a+b)=\ln(a^2+b^2+1)$, iar $f'_y(a,b) \neq 0$,

există $U \in \mathcal{V}_a$, şi $V \in \mathcal{V}_b$ şi o unică funcție $y=y(x)$, $y : U \to V$ definită implicit de ecuația dată, $y \in C^\infty(U)$.

Dacă, de exemplu $a=b=0$, aceste condiții sunt verificate şi $y(0)=0$, iar $\mathrm{arctg}(x+y(x))=\ln(x^2+y^2(x)+1)$, $\forall x \in U$; de aici, prin derivare, obținem:

$$(1+y')(x^2+y^2+1) = 2(x+yy')[1+(x+y)^2], \quad x \in U$$

de unde, pentru $x=0$ avem $y'(0) = -1$; derivând încă odată şi ținând cont de faptul că $y = y(x)$, $y' = y'(x)$ obținem

$y''(x^2+y^2+1)+2(1+y')(x+yy')=2(1+y'^2+yy'')[1+(x+y)^2]+2(x+yy')\cdot 2(x+y)(1+y')$;
cum y(0)=0 şi $y'(0)=-1$, punând x=0 rezultă că $y''(0)=4$. Deci curba de ecuație y=y(x), x∈U admite în origine o tangentă de pantă $m=y'(0)=-1$ şi de ecuație $y=-x$; în plus, cum $y''(0)=4>0$, rezultă că există o vecinătate a punctului (0,0) în în care graficul este o curbă convexă.

Observație. Să presupunem că sunt îndeplinite condițiile din teorema funcțiilor implicite astfel ca într-o vecinătate a punctului (a,b) ecuația f(x,y)=0 să definească o funcție y=y(x) care admite un extrem local în x=a. Atunci, conform teoremei lui Fermat, $y'(a)=0$ şi, conform formulei (1), cuplul (a,b) *trebuie* să fie o soluție a sistemului:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f'_x(x,y)=0 \end{cases}$$

Dacă, în plus, k≥2, din (2) rezultă că

$$y''(a)=\frac{f''_{x^2}}{f'_y}(a,b),$$

deci dacă $y''(a)<0$, funcția y=y(x) are un maxim local în a şi y_{max}=y(a)=b; analog, dacă $y''(a)>0$, atunci y are un minim local în x=a.

Exemplul 11. Să determinăm extremele funcțiilor implicite y=y(x) de clasă C^2 definite de ecuația $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)+2\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=0$.

Să remarcăm mai întâi că $f\in C^2(E)$, unde $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ şi

$$f'_y(x,y)=\frac{2(x+y)}{x^2+y^2}.$$

Prin urmare pentru orice (a,b)∈E cu b≠–a şi f(a,b)=0 există $U\in\mathcal{V}_a$ şi $V\in\mathcal{V}_b$ şi o unică funcție $y: U\to V$, $y\in C^2(U)$ definită implicit de ecuația dată pentru care y(a)=b. Cum teorema funcțiilor implicite dă doar condiții suficiente de existență a acestor funcții trebuie să examinăm două cazuri: b≠–a şi b= –a.

Cazul b ≠ –a. Presupunem că f(a,b)=0 şi că funcția y=y(x) definită de ecuația dată pe U admite un extrem în x=a; atunci $y'(a)=0$, deci (a,b) verifică ecuațiile f(x,y)=0 şi $f'_x(x,y)=0$. Dar $f'_x(x,y)=\frac{2(x-y)}{x^2+y^2}$; prin urmare $a=b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ şi

$$y''(a)=-\frac{f''_{x^2}}{f'_y}(a,a)=-\frac{1}{2a}.$$

În consecință ecuația f(x,y)=0 defineşte *două* funcții implicite care au extreme locale $y_i: U_i\to V_i$, $i=\overline{1,2}$, unde $U_1, V_1\in\mathcal{V}_{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}$, $U_2, V_2\in\mathcal{V}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}$ sunt mulțimi deschise şi

$$y_{1\min}=y_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} \text{ iar } y_{2\max}=y_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\text{ ; nu putem}$$

afirma că $y_1=y_2$!

Cazul b = –a ≠ 0. În acest caz nu este îndeplinită condiția (iii) din teorema funcțiilor implicite. Presupunem că există totuşi y=y(x) definită de ecuația f(x,y)=0,

$y(a) = b = -a$ şi $y'(a) = 0$; atunci f(a, –a)=0, deci $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$; derivând ambii membri ai ecuației obținem, după eliminarea numitorului,

$$x - y + (x + y)y' = 0 \quad , \quad x \in U \in \mathcal{V}_a ,$$

iar pentru x=a şi y= –a obținem a=0; contradicție!

Cazul p>1 şi q=1

Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ şi $B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi deschise.

Consecința 2. Dacă $f : A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^k, $k \geq 1$ şi există $(a,b) \in A \times B$ astfel ca f(a,b)=0, atunci există $U \subset A$, $U \in \mathcal{V}_a$, $V \subset B$, $V \in \mathcal{V}_b$ şi o unică funcție $g : U \to V$ astfel ca

(a) $g \in C^k(U)$ şi f(x,g(x))=0, pentru orice $x \in U$

(b) g(a)=b

(c) $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = -\frac{f'_{x_j}}{f'_y}(x, y)$, $x \in U$ şi y=g(x).

Pentru k>1 derivatele de ordin superior se determină prin recurență ca în cazul precedent.

Exemplul 12. Să se determine $d^2_{(0,0)}z$ unde z=z(x,y) este funcția definită implicit de ecuația $f(x,y,z)=x^3+3xyz-z^3+z=0$ ştiind că z(0,0)=1. Pentru început verificăm corectitudinea textului. Luând a=(0,0) şi b=1 avem f(0,0,1)=0, $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, iar $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = -2 \neq 0$. Conform teoremei funcțiilor implicite există $U \in \mathcal{V}_{(0,0)}$ şi $V \in \mathcal{V}_1$ şi o unică funcție $z: U \to V$, $z \in C^2(U)$ (deci de două ori diferențiabilă în origine) astfel ca z(0,0)=1 şi f(x,y,z(x,y))=0, $(x,y) \in U$; prin urmare textul este corect. Ca în exemplul precedent derivăm în raport cu x apoi cu y ambii membri ai ecuației date, cu z=z(x,y):

$$3x^2 + 3yz + (3xy - 3z^2 + 1)z'_x = 0 \tag{1}$$

$$3xz + (3xy - 3z^2 + 1)z'_y = 0 \tag{2}$$

Punând x=y=0 şi z=1 în (1) şi (2) obținem

$$z'_x(0,0) = z'_y(0,0) = 0 \tag{3}$$

Derivând în raport cu x, apoi cu y în (1) şi cu y în (2) avem

$$6x + 3yz'_x + (3y - 6zz'_x)z'_x + (3xy - 3z^2 + 1)z''_{x^2} = 0$$

$$3z + 3yz'_y + (3x - 6zz'_y)z'_x + (3xy - 3z^2 + 1)z''_{xy} = 0$$

$$3xz'_y + (3x - 6zz'_y)z'_y + (3xy - 3z^2 + 1)z''_{y^2} = 0$$

pentru $(x,y) \in U$; pentru x=y=0 obținem, conform (3):

$$z''_{x^2}(0,0) = 0 = z''_{y^2}(0,0) \quad \text{şi} \quad z''_{xy}(0,0) = \frac{3}{2}.$$

Prin urmare $d^2_{(0,0)}z = 3dxdy$.

Cazul p>1 , q≥1

Să remarcăm că în acest caz ecuaţia f(x,y)=0 este de fapt un sistem de q ecuaţii:

$$\begin{cases} f_1(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)=0 \\ .... \\ f_q(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q)=0 \end{cases}$$

Dacă teorema funcţiilor implicite este verificată, adică într-o vecinătate a punctului (a,b) sunt definite funcţiile $y_1=y_1(x_1,...,x_p),...,y_q=y_q(x_1,...,x_p)$, pentru calculul derivatelor parţiale ale acestor funcţii derivăm, de exemplu, în raport cu x_j , conform formulei de derivare a funcţiilor compuse, ecuaţiile acestui sistem şi obţinem sistemul liniar:

$$f'_{i x_j}+f'_{i y_1}y'_{1 x_j}+...+f'_{i y_q}y'_{q x_j}=0,\ \ i=\overline{1,p},$$

de unde, cu regula lui Cramer, obţinem derivatele parţiale $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$. Prin recurenţă, folosind acelaşi procedeu, aflăm derivatele parţiale de ordin superior ale funcţiilor y_i , $i=\overline{1,q}$ (pentru k>1).

Exemplul 13. Să determinăm $y''(0)$ şi $z''(0)$ pentru funcţiile y=y(x) şi z=z(x) definite de sistemul

$$\begin{cases} x^3+2xy+z^3-z=0 \\ x^2-3yz+z+2=0 \end{cases}$$

ştiind că z(0)=1. Fie f(x,y,z)= $x^3+2xy+z^3-z$ şi g(x,y,z)= $x^2-3yz+z+2$. Deoarece f(0,y,1)=0 şi g(0,y,1)= –3y+3, considerăm, pentru verificarea condiţiilor din teorema funcţiilor implicite, a=0 şi b=(1,1). Desigur f(0,1,1)= g(0,1,1)=0, $f,g\in C^2(\mathbf{IR}^3)$ şi $\frac{D(f,g)}{D(y,z)}(0,1,1)=\begin{vmatrix} 2x & 3z^2-1 \\ -3z & 1-3y \end{vmatrix}_{(0,1,1)}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=6\neq 0$; deci există vecinătăţile $U\in\mathcal{V}_0$, $V\in\mathcal{V}_{(1,1)}$ şi unica funcţie U→V, $x\mapsto(y(x),z(x))\in V$, astfel ca y(0)=z(0)=1, $y,z\in C^2(U)$ şi f(x,y(x),z(x))=0 = g(x,y(x),z(x)), pentru orice x∈U. Pentru calculul lui y' şi z' derivăm ecuaţiile sistemului ţinând seama că y=y(x) şi z=z(x); deci:

$$\begin{cases} 3x^2+2y+2xy'+3z^2z'-z'=0 \\ 2x-3y'z+3yz'+z'=0 \end{cases} \tag{1}$$

Pentru x=0 obţinem $y'(0)=\frac{2}{3}$ şi $z'(0)=-1$. Prin derivare din (1) rezultă că:

$$\begin{cases} 6x+4y'+2xy''+6zz'^2+3z^2z''-z''=0 \\ 2-3y''z-6y'z'-3yz''+z''=0 \end{cases}$$

şi punând x=0 obţinem: $y''(0)=\frac{32}{9}$ şi $z''(0)=-\frac{13}{3}$.

Exemplul 14. Să arătăm că într-o vecinătate a punctului $(1,1,1,-1,1)\in\mathbf{IR}^5$ sistemul :

$$\begin{cases} f(x,y,z,u,v) = x^3 - 3xy + zu^2 + v^3 = 0 \\ g(x,y,z,u,v) = xyz + z - u^2 - v^2 = 0 \end{cases}$$

defineşte funcțiile implicite u=u(x,y,z), v=v(x,y,z) şi să determinăm $d_{(1,1,1)}u$ şi $d_{(1,1,1)}v$.

Verificăm întâi condițiile din teorema funcțiilor implicite. Desigur f,g∈C^1(I**R**^{5}), f(1,1,1,–1,1)=0= g(1,1,1,–1,1) iar $\dfrac{D(f,g)}{D(u,v)}(1,1,1,-1,1) = -2 \neq 0$; prin urmare există o vecinătate $U \in \mathcal{V}_{(1,1,1)}$ şi o vecinătate $V \in \mathcal{V}_{(-1,1)}$ şi o unică funcție U→V, $(x,y,z) \mapsto (u(x,y,z),v(x,y,z)) \in V$ pentru care u(1,1,1)= –1 şi v(1,1,1)=1. Derivăm în raport cu x cele două ecuații ținând cont că u=u(x,y,z) şi v=v(x,y,z). Rezultă:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y + 2zuu'_x + 3v^2v'_x = 0 \\ yz - 2uu'_x - 2vv'_x = 0 \end{cases}$$

iar pentru $x = y = z = 1$ avem $-2u'_x(1,1,1) + 3v'_x(1,1,1) = 0$ şi $1 + 2u'_x(1,1,1) - 2v'_x(1,1,1) = 0$; prin urmare

$$u'_x(1,1,1) = -\frac{3}{2} \text{ şi } v'_x(1,1,1) = -1. \tag{1}$$

Analog, derivând în raport cu y avem:

$$\begin{cases} -3x + 2zuu'_y + 3v^2v'_y = 0 \\ xz - 2uu'_y - 2vv'_y = 0 \end{cases},$$

de unde pentru $x = y = z = 1$:

$$u'_y(1,1,1) = \frac{3}{2} \text{ şi } v'_y(1,1,1) = 2 \tag{2}$$

Derivând în raport cu z şi punând $x = y = z = 1$ obținem:

$$u'_z(1,1,1) = -3 \text{ şi } v'_z(1,1,1) = -4 \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă că:

$$d_{(1,1,1)}u = -\frac{3}{2}dx + \frac{3}{2}dy - 3dz \text{ şi } d_{(1,1,1)}v = -dx + 2dy - 4dz.$$

C. DEPENDENȚĂ FUNCȚIONALĂ

În această secțiune vom aborda o problemă inversă problemei funcțiilor implicite. Să considerăm funcțiile $f_1,\dots,f_q : A \subset$ I**R**$^p \to$ I**R**, $r < q \le p$, $a \in \mathring{A}$, $U \in \mathcal{V}_a, U \subset A$.

Problema dependenței funcționale: În ce condiții există o funcție de clasă C^1 F : E ⊂ I**R**^{q} → I**R** pentru care $(f_1(x),\dots,f_q(x)) \in E$, $x \in U$, astfel încât ecuația $F(y_1,\dots,y_q) = 0$ să definească implicit funcțiile $y_i = y_i(y_1,\dots,y_r)$ şi $f_i(x) = y_i(f_1(x),\dots,f_r(x))$, $x \in U$, pentru $i = \overline{r+1,q}$?

Exemplul 15. Fie funcțiile f_1, f_2, f_3 : I**R**$^3 \to$ I**R**, $f_1(x,y,z) = x + y + z$, $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $f_3(x,y,z) = xy + yz + zx$; considerând $F(u,v,w) = u^2 - v - 2w$, F: I**R**$^3 \to$ I**R**, atunci $F(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) = 0$, pentru (x,y,z) ∈ I**R**^{3}. Deci ecuația

$F(u,v,w)=0$, pentru care $F'_v=-1$ şi $F'_w=-2$, defineşte $v=v(u,w)$, respectiv $w=w(u,v)$; de fapt: $f_2=f_1^2-2f_3$ (respectiv $f_3=\frac{1}{2}\left(f_1^2-f_2\right)$) pe I**R**^{3}.

Definiția 3. Fie $f,f_1,f_2,...,f_q$: A⊂I**R**^{p}→ I**R**.

(a) Spunem că f *depinde funcțional de funcțiile* $f_1,...,f_q$ *pe mulțimea* $B\subset A$ dacă există o funcție F : E ⊂ I**R**^{q} → I**R**, F ∈C^1(E) astfel ca:

$$f=F(f_1,f_2,...,f_q) \text{ pe } B \tag{*}$$

adică $f(x)=F(f_1(x),...,f_q(x))$ pentru orice $x\in B$. Relația (*) se numeşte *relație de dependență funcțională* (pe B); în acest caz mai spunem că *funcțiile* $f,f_1,...,f_q$ *sunt dependente funcțional pe* B.

(b) Spunem că f *depinde funcțional de funcțiile* $f_1,f_2,...,f_q$ (pe A) dacă pentru orice $a\in A$ există o vecinătate $U\subset A$ a punctului a astfel ca f să depindă funcțional de $f_1,...,f_q$ pe U.

(c) Spunem că *funcțiile* $f_1,f_2,...,f_q$ *sunt independente funcțional în* $a\in A$ dacă nu există nici o vecinătate $U\in\mathcal{V}_a$ pe care funcțiile $f_1,f_2,...,f_q$ să fie dependente funcțional.

Observație. În acord cu definiția de mai sus putem spune că funcțiile $f_1,...,f_q$ sunt dependente funcțional pe $B\subset A$ dacă există o funcție nenulă F : E ⊂ I**R**^{p} → I**R** de clasă C^1 astfel ca ecuația:

$$F(y_1,...,y_q)=0$$

să definească cel puțin o variabilă y_i în funcție de celelalte $q-1$ variabile şi $F(f_1(x),...,f_q(x))$=0, pentru orice $x\in B$ (definiție implicită a dependenței funcționale). Şi în acest caz spunem că relația:

$$F(f_1,f_2,...,f_q)=0$$

este *o relație de dependență funcțională* (pe B).

În exemplul precedent o relație de dependență funcțională este $f_1^2-f_2-2f_3=0$ (pe I**R**^{3}).

Următorul exemplu ne arată că noțiunile de independență, respectiv dependență funcțională sunt extinderi naturale ale conceptelor similare studiate în algebra liniară.

Exemplul 16. Fie $f_i(x_1,...,x_p)=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}x_j, i=\overline{1,q}$. Aplicațiile liniare $f_1,...,f_q$ sunt elemente ale spațiului dual al I**R**-spațiului liniar I**R**^{p}. Cum $\{dx_1,...,dx_p\}$ este baza duală bazei canonice a spațiului euclidian I**R**^{p} putem scrie $f_i=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}dx_j, i=\overline{1,q}$. Să presupunem că $p\geq q$, r este rangul matricii $J=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,q}\\ j=\overline{1,p}}}$ şi $d=\det(a_{ij})_{i,j=\overline{1,r}}$ este un minor principal al matricii J.

1. Dacă $r = q$, sau, echivalent $\frac{D(f_1,...,f_q)}{D(x_1,...,x_q)} \neq 0$, atunci aplicațiile $f_1,...,f_q$ sunt liniar independente în spațiul dual L al spațiului I**R**^{p}. Funcțiile $f_1,...,f_q$ sunt independente şi în sens funcțional; într-adevăr, dacă ele nu ar fi independente funcțional ar exista $a \in$ I**R**^{p}, $U \in \mathcal{V}_a$ şi o funcție $F : E \subset$ I**R**$^p \to$ I**R**, $F \in C^1(E)$ *nenulă* astfel ca $F(f_1(x),...,f_q(x)) = 0, x \in U$; derivând în raport cu x_i obținem sistemul liniar omogen:

$$a_{1i}F'_{y_1} + a_{2i}F'_{y_2} + ... + a_{qi}F'_{y_q} = 0,\ i = \overline{1,p}$$

care are doar soluția banală $F'_{y_1} = ... = F'_{y_q} = 0$ (matricea sistemului fiind matricea nesingulară J); prin urmare $dF = 0$, deci $F = 0$; contradicție!

2. Fie $r < q$. Atunci $d = \frac{D(f_1,...,f_r)}{D(x_1,...,x_r)} \neq 0$ iar $\{f_1,...,f_r\}$ este o bază a spațiului generat de $f_1,...,f_q$; prin urmare există constantele unice $\lambda_{ij} \in$ I**R** astfel ca

$$f_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} f_j \text{ pe I}\mathbf{R}^p,\ i = \overline{r+1,q}$$

relații explicite care exprimă dependența(liniară şi funcțională) a funcțiilor $f_{r+1},...,f_q$ de funcțiile $f_1,...,f_r$; cu ajutorul minorilor caracteristici(teorema lui Rouché) relațiile

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} & f_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} & f_r \\ a_{i1} & ... & a_{ir} & f_i \end{vmatrix} = 0 \text{ pe I}\mathbf{R}^p,\ i = \overline{r+1,q}$$

reprezintă relații de dependență funcțională implicite (care definesc unic funcțiile $f_{r+1},...,f_q$).

Folosind teorema inversiunii locale vom extinde constatările de natură algebrică din exemplul precedent la alte funcții.

Teorema 4. Fie $f, f_1,...,f_q : A \subset$ I**R**$^p \to$ I**R** funcții de clasă C^1 astfel ca $p \geq q$ şi $\frac{D(f_1,...,f_q)}{D(x_1,...,x_q)}(x) \neq 0$, pentru orice $x \in A$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) f depinde funcțional de funcțiile $f_1,...,f_q$ pe A ;

(b) există $\lambda_i : A \to$ I**R**, $\lambda_i \in C^0(A), i = \overline{1,q}$ astfel ca $df = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i df_i$ pe A.

Demonstrație. 1. (a)⇒(b). Fie $a \in A$; din ipoteza (a) rezultă că există o vecinătate $U \subset A$ a punctului a şi $F : E \subset$ I**R**$^p \to$ I**R**, $F \in C^1(E)$ astfel ca:

$$f(x) = F(f_1(x),...,f_q(x)), x \in U,$$

de unde $df = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial F}{\partial y_i} df_i$; cum $F \in C^1(E)$ rezultă că $\lambda_i = \frac{\partial F}{\partial y_i} \in C^0(U)$, de unde rezultă (b).

2. (b)⇒(a). Fie $a \in A$ fixat. Definim aplicația $g : A \to$ I**R**^{p} prin

$$g(x) = (f_1(x),...,f_q(x), x_{q+1},...,x_p), x = (x_1,...,x_p) \in A \qquad (1)$$

Cum jacobianul funcției g în a este $\det J_g(a) = \frac{D(f_1,\dots,f_q)}{D(x_1,\dots,x_q)}(a) \neq 0$, din teorema de inversiune locală rezultă că există U∈$\mathcal{V}_a$ astfel ca g să realizeze o transformare regulată de la U la V=g(U). Convenim să notăm tot cu g, respectiv f, f_i restricțiile $g : U \to V$, respectiv $f, f_i : U \to$ **IR** şi cu:

$$F_1, h_i : V \to U \to \mathbf{IR},\quad F_1 = f \circ g^{-1}, h_i = f_i \circ g^{-1}, i = \overline{1,q} \tag{2}$$

Conform ipotezei (a) există funcțiile continue λ_i astfel ca $df = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i df_i$ pe U deci conform (2) avem

$$dF_1 = df \circ dg^{-1} = \sum_{i=1}^{q} \left(\lambda_i \circ dg^{-1}\right) \cdot d\left(f_i \circ g^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i dh_i \tag{3}$$

unde $\alpha_i = \lambda_i \circ dg^{-1}$ este continuă, $i = \overline{1,q}$.

Dacă $y = (y_1,\dots,y_p) = (f_1(x),\dots,f_q(x), x_{q+1},\dots,x_p) \in V$, unde $x \in U$ atunci

$$h_i(y) = f_i\left(g^{-1}(x)\right) = f_i(x) = y_i, i = \overline{1,q} \tag{4}$$

Din (3) şi (4) rezultă că $d_y F_1 = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(y) dy_i$, pentru orice $i = \overline{1,q}$ şi orice $y \in V$, adică $\frac{\partial F_1}{\partial y_i} = 0, i = \overline{q+1,p}$; prin urmare F_1 depinde doar de variabilele $y_1,\dots,y_q$. Fie:

$$F(y_1,\dots,y_q) = F_1(y_1,\dots,y_q,y_{q+1},\dots,y_p),\ y = (y_1,\dots,y_p) \in V, \tag{5}$$

$x \in U$ şi $y = (f_1(x),\dots,f_q(x), x_{q+1},\dots,x_p) = g(x)$. Din (1), (2) şi (5) avem

$$F(f_1(x),\dots,f_q(x)) = F_1(g(x)) = f \circ g^{-1}(g(x)) = f(x), x \in U,$$

adică f depinde funcțional de funcțiile $f_1,\dots,f_q$ pe A şi (a) este complet demonstrat.

Teorema precedentă ne înlesneşte demonstrația următorului rezultat fundamental, rezultat care reduce – ca în cazul liniar prezentat în exemplul 16 – studiul dependenței funcționale la studiul rangului matricii jacobiene.

Teorema 5 (*a dependenței funcționale*). Fie $f_1,\dots,f_q : A \subset \mathbf{IR}^p \to \mathbf{IR}$, q ≤ p, funcții de clasă C^1 astfel ca rangul matricii jacobiene $J_f(x)$ să fie r pentru orice $x \in A$, unde $f = (f_1,\dots,f_q)$. Atunci r dintre funcțiile $f_1,\dots,f_q$ sunt independente funcțional în orice $a \in A$, iar celelalte $q - r$, dacă $r < q$, depind funcțional de primele r funcții.

Demonstrație. Fie $a \in A$ fixat. Putem presupune, cu o eventuală renumerotare, că $\frac{D(f_1,\dots,f_r)}{D(x_1,\dots,x_r)}(a) \neq 0$. Cum derivatele parțiale ale funcțiilor $f_1,\dots,f_r$ sunt continue, există U∈$\mathcal{V}_a$, U ⊂ A astfel ca:

$$\frac{D(f_1,\dots,f_r)}{D(x_1,\dots,x_r)}(x) \neq 0, \text{ pentru orice } x \in U.$$

În acest caz liniile matricii jacobiene corespunzătoare derivatelor parțiale a funcțiilor $f_{r+1},\dots,f_q$, desigur pentru $r < q$, sunt combinații liniare a primelor r linii, deci există

funcțiile continue $\lambda_1,...,\lambda_r : U \to$ I**R** astfel ca $df_i = \sum_{i=r+1}^{q} \lambda_i df_i$ pe U. Din teorema 4 rezultă că f_i depinde funcțional pe U de funcțiile $f_1,...,f_r$.

Dacă $r = q$ să presupunem, prin absurd că $f_1,...,f_q$ nu sunt independente funcțional în a. Atunci există o vecinătate $U \in \mathcal{V}_a$, $U \subset A$ şi o funcție nenulă $F : E \subset$ I**R**^{p} $\to$ I**R** astfel ca $F(f_1(x),...,f_q(x)) = 0$, pentru orice $x \in A$. Fie $G(x) = F(f_1(x),...,f_q(x))$. Diferențiind într-un punct arbitrar $x \in U$ şi notând $y = (f_1(x),...,f_q(x))$ obținem:

$$d_x G = \sum_{i=1}^{q} F'_{y_i}(y) d_x f_i = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} F'_{y_i}(y)\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)dx_j = 0$$

de unde rezultă că:

$$\sum_{i=1}^{q} F'_{y_i}(y)\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = 0, j = \overline{1,p}, x \in U,$$

adică un sistem omogen care are ca matrice (considerând necunoscutele $F'_{y_i}(y), i = \overline{1,q}$) exact matricea jacobiană; dar $r = q \le p$, deci sistemul admite doar soluția banală; prin urmare $\frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, i = \overline{1,q}$ deci F este o constantă; contradicție! În consecință funcțiile $f_1,...,f_q$ sunt independente funcțional în orice $a \in A$.

Observație. Demonstrația teoremei precedente localizează cele r funcții independente funcțional, prin intermediul minorului principal într-o vecinătate a unui punct $a \in A$ şi, în consecință şi celelalte $q - r$ funcții dependente funcțional de primele r. Teorema lui Rouché oferă o tehnică de determinare a unor relații de dependență funcțională.

Exemplul 17. Fie $u = f(x + y + z), y = g(x - 2y + z), w = h(-x + y + \alpha z)$ unde funcțiile $f, g, h \in C^1$(I**R**) şi sunt strict crescătoare. Să se determine α ∈ I**R** astfel încât u, v, w să fie dependente funcțional pe I**R**^{3} şi să se găsească o relație de dependență funcțională.

Conform teoremei dependenței funcționale trebuie să impunem ca matricea jacobiană să aibă rangul $r < 3$. Determinantul funcțional în punctul curent $(x, y, z) \in$ I**R**^{3} este

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = f' \cdot g' \cdot h' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = -3(\alpha + 1) f' \cdot g' \cdot h'.$$

Dar $f'(t) \cdot g'(t) \cdot h'(t) > 0$, $t \in$ I**R**; prin urmare pentru α ∈ I**R**$\setminus\{-1\}$ funcțiile sunt independente funcțional iar pentru $\alpha = -1$ sunt dependente. Fie $\alpha = -1$; să alegem, de exemplu minorul principal $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \neq 0$; cum f, g, h sunt inversabile (ca funcții între I**R** şi imaginea lui I**R**) putem scrie sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = f^{-1}(u) \\ x - 2y + z = g^{-1}(v) \\ -x + y - z = h^{-1}(w) \end{cases},$$

sistem care este compatibil nedeterminat; atunci, conform teoremei lui Rouché minorul caracteristic este nul, deci:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & f^{-1}(u) \\ 1 & -2 & g^{-1}(v) \\ -1 & 1 & h^{-1}(w) \end{vmatrix} = 0$$

reprezintă o relație de dependență funcțională implicită care se poate explicita; de exemplu:

$$w = h\left[f^{-1}(u) - 2g^{-1}(v)\right].$$

D. SCHIMBĂRI DE VARIABILE

Schimbările de coordonate locale – în limbaj curent, schimbări de variabile – sunt des folosite pentru simplificarea unor expresii, ori calcule, îndeosebi la calculul integralelor şi la rezolvarea unor ecuații diferențiale. În această secțiune vom analiza câteva tipuri de schimbări de variabile. Pentru a simplifica expunerea vom presupune că funcțiile analizate au toate calitățile impuse de context.

Schimbarea variabilei independente

Considerăm expresia:

$$E = E\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right), \tag{1}$$

unde x este *variabilă independentă*, $y = y(x)$ şi $n \geq 1$. Fie φ o transformare regulată de clasă C^n(deci $\varphi'(t) \neq 0$, pentru orice t din domeniul funcției φ). Vom da răspuns următoarei *probleme*: cum se transformă expresia (1) dacă *schimbăm variabila* x *cu noua variabilă independentă* t *folosind formula*:

$$x = \varphi(t);$$

dacă notăm $Y(t) = y(\varphi(t))$, derivatele $y' = \dfrac{dy}{dx}, y'' = \dfrac{d^2x}{dx^2}, \ldots, y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ se vor exprima cu ajutorul derivatelor $Y' = \dfrac{dY}{dt}, Y'' = \dfrac{d^2Y}{dt^2}, \ldots, Y^{(n)} = \dfrac{d^nY}{dt^n}$, iar expresia (1) devine:

$$E = E_1\left(t, Y, Y', \ldots, Y^{(n)}\right),$$

unde t este noua variabilă independentă, iar $Y = Y(t)$ este noua funcție.

Pentru a rezolva problema pusă vom indica un procedeu de calcul al derivatelor $Y', \ldots, Y^{(n)}$ prin recurență. Cum Y este o funcție compusă, folosind regula de derivare pentru funcții compuse obținem

$$Y' = \frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \varphi' \cdot \frac{dy}{dx},$$

de unde, cum $\varphi'(t) \neq 0$, rezultă că:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'} \cdot \frac{dY}{dt} = \frac{1}{\varphi'} \cdot Y'. \tag{2}$$

Aceeaşi formulă o putem obține folosind regula de derivare a funcțiilor inverse; deoarece transformarea φ este regulată avem $y(x) = Y\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ şi derivând rezultă:

$$y' = \frac{dY}{dt}\cdot\frac{d\varphi^{-1}}{dx} = \frac{dY}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{1}{\varphi'}\cdot\frac{dY}{dt}.$$

Formula (2) permite stabilirea legăturii dintre *operatorul de derivare în raport cu* x (necesar pentru calculul derivatelor $y', y'',...$): $\frac{d}{dx}$ şi *operatorul de derivare în raport cu* $t: \frac{d}{dt}$ (folosit pentru a calcula $Y', Y'',...$):

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\varphi'}\cdot\frac{d}{dt}. \tag{3}$$

Operatorul $\frac{d}{dx}$ din relația operatorială (3) permite, prin recurență, să calculăm $y'', y''',..., y^{(n)}$. De exemplu: pentru calculul lui y'' în relația (3) operatorul $\frac{d}{dx}$ se aplică lui y', căci $y'' = \frac{dy'}{dx}$ iar operatorul $\frac{d}{dt}$ acționează tot asupra lui y', dar exprimat în funcție de t, adică, conform formulei (2), scriem $\frac{d}{dt}\left(\frac{Y'}{\varphi'}\right)$. Deci

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\varphi'}\frac{d}{dt}\left(\frac{Y'}{\varphi'}\right) = \frac{1}{\varphi'^3}\left[\varphi'Y'' - \varphi''Y'\right].$$

Analog $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{1}{\varphi'}\frac{d}{dt}\frac{\varphi'Y'' - \varphi''Y'}{\varphi'^3}$ etc.

Observație. De multe ori (în special în fizică, ori în aplicațiile ei) funcția $Y = Y(t)$ se notează, prin abuz de notație, tot cu y, iar derivatele $Y', Y'',...$ se notează cu $\dot{y}, \ddot{y},...$

Exemplul 18. Ce devine ecuația $x^3y''' + x^2y'' + xy' + y = \ln x$ în urma schimbării de variabilă $x = e^t$?

Pentru a răspunde la această întrebare construim operatorul de derivare $\frac{d}{dx}$ folosind, cu observația precedentă, schema:

$$y(x) = y(t(x)) \tag{1}$$

unde t reprezintă inversa funcției $x = x(t)$ (în cazul nostru $t(x) = \ln x$). Derivând (în raport cu x) ambii membri din (1), obținem:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x'}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\dot{y} \tag{2}$$

de unde:

$$\frac{d}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}. \tag{3}$$

Atunci: $y'' = \frac{dy'}{dx} \underset{(3)}{=} e^{-t}\frac{dy'}{dt} \underset{(2)}{=} e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\dot{y}\right) = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$. (4)

Analog:

$$y''' = \frac{dy''}{dx} \underset{(3)}{=} e^{-t}\frac{dy''}{dt} \underset{(4)}{=} e^{-t}\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})\right] = e^{-3t}\left[\dddot{y}-\ddot{y}-2(\ddot{y}-\dot{y})\right] = e^{-3t}(\dddot{y}-3\ddot{y}+2\dot{y}) \ . \qquad (5)$$

Din (2), (4) şi (5) (prin înmulțire cu $x=e^t$, $x^2=e^{2t}$, respectiv $x=e^{3t}$) ecuația dată devine: $\dddot{y}-3\ddot{y}+2\dot{y}+\ddot{y}-\dot{y}+\dot{y}+y=t$, deci $\dddot{y}-2\ddot{y}+2\dot{y}+y=t$, adică o ecuație care defineşte *noua funcție* y=y(t).

Observație. Uneori, îndeosebi pentru rezolvarea unor ecuații diferențiale, se schimbă rolul variabilei independente x cu cel al funcției y (adică se consideră că soluția ecuației $y=y(x)$ este o schimbare de coordonate, deci există inversa funcției $y: x=x(y)$). Atunci $Y(y)=x$, $t=y$ şi:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dot{x}},$$

iar operatorul de derivare $\frac{d}{dx} = \frac{1}{\varphi'}\frac{d}{dt}$ devine:

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dy},$$

operator care serveşte la calculul derivatelor $y', y'', y''', ...$ în funcție de $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, ...$

Exemplul 19. Ce devine ecuația $y'y''' = 3y''^2$ schimbând rolul variabilei independente x cu cel al funcției y?

Pentru a rezolva această problemă considerăm că funcția $y=y(x)$ este inversabilă şi $x=x(y)$ este inversa ei. Atunci $y' = \frac{1}{\dot{x}}$ şi $\frac{d}{dx} = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dy}$ este operatorul de derivare; deci $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right) = -\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3}$, iar $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dy}\left(-\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^3}\right) = -\frac{1}{\dot{x}}\frac{\dddot{x}\dot{x}^3 - 3\dot{x}^2\ddot{x}^2}{\dot{x}^6} = -\frac{1}{\dot{x}^4}(\dot{x}\dddot{x} - 3\ddot{x}^2)$. Înlocuind y', y'', y''' în ecuația dată obținem $-\frac{1}{\dot{x}^6}(\dot{x}\dddot{x} - 3\ddot{x}^2) = 3\frac{\ddot{x}^2}{\dot{x}^6}$, deci $\dddot{x}=0$. Remarcăm aici utilitatea acestei transformări; ecuația $\dddot{x}=0$ prin integrări consecutive ne dă $x(y)=ay^2+by+c$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$; prin urmare soluția $y=y(x)$ a ecuației date este definită implicit de ecuația $ay^2+by+c-x=0$.

Observație. Dacă schimbarea de variabilă $x=x(t)$ nu este dată explicit ci ca soluția implicită a unui ecuații de forma: $f(x,t)=0$, atunci $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\frac{f'_t}{f'_x}$ şi $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dot{x}}\frac{dy}{dt} = -\frac{f'_x}{f'_t}\frac{dy}{dt}$, iar operatorul de derivare devine: $\frac{d}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_t}\frac{d}{dt}$.

Schimbarea variabilei şi a funcției

Ne propunem ca în expresia

$$E = E(x, y, y', ..., y^{(n)}), \qquad (1)$$

unde x este variabilă independentă şi $y = y(x)$, să *schimbăm atât variabila* x *cu noua variabilă* u *cât şi funcția* y *cu noua funcție* $v = v(u)$ prin intermediul unei transformări regulate de clasă C^n definită prin:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

unde $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$ este nenul în orice punct al domeniului de definiție. Cu aceasta expresia (1) devine:

$$E = E_1\left(u, v, v', ..., v^{(n)}\right)$$

unde $v', v'', ..., v^{(n)}$ sunt derivatele funcției v (în raport cu variabila independentă u). Cum $x = \varphi(u,v(u))$, iar $y = \psi(u,v(u))$, iar $\frac{dx}{du} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} + v'(u)\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{dy}{du} = \frac{\partial\psi}{\partial u} + v'(u)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}$, obținem:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{1}{\varphi'_u + v'\varphi'_v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{dv}{du}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}\right). \quad (2)$$

Relația (2) ne permite să extragem *operatorul de derivare în raport cu* x necesar pentru calculul prin recurență a derivatelor $y'', y''', ..., y^{(n)}$:

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\varphi'_u + v'\varphi'_v}\frac{d}{du}. \quad (3)$$

De exemplu $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\varphi'_u + v'\varphi'_v}\frac{d}{du}\left(\frac{\psi'_u + v'\psi'_v}{\varphi'_u + v'\varphi'_v}\right)$.

Observație. Schimbarea de variabilă şi de funcție descrisă este o generalizare a schimbării de variabilă.

Remarcăm, de asemenea, că şi în acest caz derivata $y' = \frac{dy}{dx}$ şi operatorul de derivare $\frac{d}{dx}$ se pot obține după următoarea *schemă*:

$$y(\varphi(u,v(u))) = \psi(u,v(u)) \quad (4)$$

din care, prin derivare(în raport cu variabila independentă u) obținem (2), deci şi (3). Derivatele $y', y'', y''', ...$ se pot obține şi fără operatorul (3) prin derivări succesive în (4).

Exemplul 20. Fie $y = y(x)$ ecuația unei curbe plane, unde y este de clasă C^2. Să exprimăm raza de curbură $R = \frac{(1+y')^{3/2}}{y''}$ în coordonate polare ρ, φ, considerând $\rho = \rho(\varphi)$.

Deoarece $x = \rho\cos\varphi$ şi $y = \rho\sin\varphi$, iar

$$\frac{dx}{d\varphi} = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi,$$

atunci $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi}[\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi]$.

Pentru calculul lui y'' folosim operatorul: $\frac{d}{dx}=\frac{1}{\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}$,

deci $y''=\frac{1}{\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi}\right)=$

$$=\frac{1}{(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^3}\left[(\rho''\sin\varphi+2\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)-\right.$$

$$\left.-(\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi)(\rho''\cos\varphi-2\rho'\sin\varphi-\rho\cos\varphi)\right]=\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^3}$$

Prin urmare $R=\frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$.

Schimbarea variabilelor independente

Considerăm expresia:

$$E=E(x,y,z,z'_x,z'_y,z''_{x^2},z''_{xy},z''_{y^2},...)$$

unde $z\in C^n(A), A\subset \mathbb{R}^2$, $n\geq 2$, $z = z(x,y)$. Ce devine această expresie dacă schimbăm variabilele independente x, y cu variabilele u, v prin transformarea regulată:

$$x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$$

de clasă C^n (deci $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\neq 0$ pe domeniul comun de definiție) ?

În acest caz funcția z=z(x,y) se transformă într-o nouă funcție Z=Z(u,v) prin compunerea:

$$Z(u,v)=z[\varphi(u,v),\psi(u,v)],$$

iar derivatele

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},... \text{ în derivatele } \frac{\partial Z}{\partial u},\frac{\partial Z}{\partial u},\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2},...;$$

cu aceasta expresia E devine:

$$E=E_1(u,v,Z,Z'_u,Z'_v,Z''_{u^2},Z''_{uv},Z''_{v^2},...) .$$

Conform regulilor de derivare a funcțiilor compuse obținem:

$$Z'_u=z'_x\varphi'_u+z'_y\psi'_u ,$$

$$Z'_v=z'_x\varphi'_v+z'_y\psi'_v$$

de unde:

$$z'_x=\frac{1}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}}\left[\psi'_vZ'_u-\psi'_uZ'_v\right],$$

$$z'_y=\frac{1}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}}\left[\varphi'_uZ'_v-\varphi'_vZ'_u\right].$$

Din aceste relații obținem *operatorii de derivare:*

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}}\left[\psi'_v\frac{\partial}{\partial u}-\psi'_u\frac{\partial}{\partial v}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}}\left[\varphi'_u\frac{\partial}{\partial v}-\varphi'_v\frac{\partial}{\partial u}\right],$$

operatori care servesc la calculul derivatelor $z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}, \ldots$

Observația 1. Ca şi în cazul funcțiilor de o singură variabilă se notează uneori, prin abuz de notație, noua funcție Z = Z(u, v) tot cu z = z(u, v). *Schema* care generează legătura dintre noile derivate z'_u, z'_v şi cele vechi z'_x, z'_y este:

$$z(u,v)=z[\varphi(u,v),\psi(u,v)] \tag{*}$$

adică exprimarea lui z ca funcție de u şi v direct (membrul stâng), respectiv prin intermediul transformării regulate $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, (membrul drept).

Observația 2. Uneori este mai comod ca în locul egalității (*) să folosim *schema*

$$z(x,y)=z[u(x,y),v(x,y)] \tag{**}$$

unde $[u(x,y),v(x,y)]$ este inversa transformării regulate $[\varphi(u,v),\psi(u,v)]$. În acest caz obținem, prin derivare, direct funcțiile z'_x, z'_y exprimate în raport cu noile derivate z'_u, z'_v:

$$z'_x=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x\ ,\quad z'_y=z'_u\cdot u'_y+z'_v\cdot v'_y\ ;$$

derivatele u'_x, v'_x, u'_y, v'_y se obțin, aplicând regula lui Cramer, din sistemele rezultate prin derivarea parțială în raport cu x, respectiv y, a legăturilor $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, adică:

$$\begin{cases}1=\varphi'_u\cdot u'_x+\varphi'_v v'_x\\ 0=\psi_u\cdot u'_x+\psi'_v\cdot v'_x\end{cases};\quad \begin{cases}0=\varphi'_u\cdot u'_y+\varphi'_v\cdot v'_y\\ 1=\psi'_u\cdot u'_y+\psi'_v\cdot v'_y\end{cases}.$$

Observația 3. Dacă transformarea regulată $(x, y)\leftrightarrow(u, v)$ este dată sub formă implicită:

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases} \tag{0}$$

atunci $\frac{D(F,G)}{D(x,y)}\neq 0$ şi $\frac{D(F,G)}{D(u,v)}\neq 0$ pe domeniul comun de definiție.

Dacă folosim schema (*) avem nevoie de derivatele parțiale ale funcțiilor x=x(u,v) , y=y(u, v) pe care le obținem prin rezolvarea sistemelor liniare rezultate prin derivarea relațiilor (0), adică:

$$\begin{cases}F'_x x'_u+F'_y y'_u+F'_u=0\\ G'_x x'_u+G'_y y'_u+G'_u=0\end{cases};\quad \begin{cases}F'_x x'_v+F'_y y'_v+F'_v=0\\ G'_x x'_v+G'_y y'_v+G'_v=0\end{cases}.$$

Dacă folosim schema (**), obținem u'_x, u'_y, v'_x, v'_y prin derivare în relațiile (0) în raport cu x, respectiv y, ținând seama că u = u(x, y) şi v = v(x, y), deci:

$$\begin{cases}F'_x+F'_u\cdot u'_x+F'_v\cdot v'_x=0\\ G'_x+G'_u u'_x+G'_v\cdot v'_v=0\end{cases};\quad \begin{cases}F'_y+F'_u u'_y+F'_v v'_y=0\\ G'_y+G'_u u'_y+G'_v v'_y=0\end{cases}.$$

Observația 4. Dacă expresia E conține o funcție de mai multe variabile:

$$E = E\left(x_1,...,x_p, y, y'_{x_1},...,y'_{x_p}, y''_{x_1^2}, y''_{x_1x_2},...\right)$$

unde $y = y(x_1,...,x_p)$, schimbarea variabilelor independente $x_1,...,x_p$ cu variabilele $u_1,...,u_p$ prin intermediul unei transformări regulate definite prin $x_k = \varphi_k\left(u_1,...,u_p\right)$, $k = \overline{1,p}$ se face analog.

Exemplul 21. Ce devine ecuația coardei vibrante $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial z}{\partial x^2}$, unde, $a \neq 0$ este o constantă dacă trecem la noile variabile u, v definite prin u = x + at, v = x – at?

Rezolvare. Presupunem că ecuația dată defineşte $z \in C^2(I\mathbf{R}^2)$. Cum noile variabile sunt date sub formă explicită : u = u(x, t), v = v(x, t) este mai firesc să folosim schema (**):

$$z(t, x) = z(x + at,\ x - at). \tag{1}$$

Derivând în raport cu t, respectiv x, obținem din (1):

$$z'_t = a(z'_u - z'_v), \qquad z'_x = z'_u + z'_v \tag{2}$$

de unde:

$$z''_{t^2} = a\left(az''_{u^2} - az''_{uv} - az''_{vu} + az''_{v^2}\right),$$

deci conform teoremei lui Schwarz:

$$z''_{t^2} = a^2\left(z''_{u^2} - 2z''_{uv} + z''_{v^2}\right);$$

analog $z''_{x^2} = \left(z''_{u^2} + z''_{uv} + z''_{vu} + z''_{v^2}\right)$, deci:

$$z''_{x^2} = z''_{u^2} + 2z''_{uv} + z''_{v^2}$$

şi prin înlocuire în ecuația coardei vibrante obținem :

$$z''_{uv} = 0.$$

Exemplul 22. Să se transforme ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea:

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

prin trecere la coordonate polare.

Rezolvare. Din nou considerăm că ecuația dată defineşte funcția z=z(x,y) de clasă C^2. Transformarea regulată :

$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $\rho \in (0,\infty), \varphi \in (0,2\pi)$ defineşte funcțiile $x = x(\rho,\varphi)$, $y = y(\rho,\varphi)$ explicit, prin urmare vom folosi schema (*):

$$z(\rho,\varphi) = z(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi),$$

de unde , prin derivare, obținem:

$$z'_\rho = \frac{\partial z}{\partial \rho} = z'_x x'_\rho + z'_y y'_\rho = \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = z'_x x'_\varphi + z'_y y'_\varphi = \rho\left(-\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Rezolvând sistemul în raport cu $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ rezultă:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial \varphi}. \tag{1}$$

Pentru calculul derivatelor $z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}$ extragem din (1) operatorii de derivare:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi},\qquad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Atunci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}(\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\varphi})-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}(\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\varphi})=$$

$$=\cos\varphi\left(\cos\varphi\cdot z''_{\rho^2}+\frac{\sin\varphi}{\rho}z'_{\varphi}-\frac{\sin\varphi}{\rho}z''_{\varphi\rho}\right)-$$

$$-\frac{\sin\varphi}{\rho}\left(-\sin\varphi\cdot z'_{\rho}+\cos\varphi\cdot z''_{\rho\varphi}-\frac{\cos\varphi}{\rho}z'_{\varphi}-\frac{\sin\varphi}{\rho}z''_{\varphi^2}\right)=$$

$$=\cos^2\varphi\cdot z''_{\rho^2}-\frac{2}{\rho}\sin\varphi\cos\varphi\cdot z''_{\rho\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}z''_{\varphi^2}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho}z'_{\rho} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\cos\varphi\cdot z'_{\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}z'_{\varphi}\right)+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\cdot z'_{\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}z'_{\varphi}\right)=$$

$$=\sin\varphi\left(\cos\varphi\cdot z''_{\rho^2}+\frac{\sin\varphi}{\rho^2}z'_{\rho}-\frac{\sin\varphi}{\rho}z''_{\varphi\rho}\right)+\frac{\cos\varphi}{\rho}\left(-\sin\varphi\cdot z'_{\rho}+\cos\varphi\cdot z''_{\rho\varphi}-\frac{\cos\varphi}{\rho}z'_{\varphi}-\frac{\sin\varphi}{\rho}z''_{\varphi^2}\right)=$$

$$=\sin\varphi\cos\varphi\cdot z''_{\rho^2}+\frac{1}{\rho}\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)z''_{\rho\varphi}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}z''_{\varphi^2}+\frac{1}{\rho^2}\left(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\right)z'_{\varphi}-$$

$$-\frac{1}{\rho}\sin\varphi\cos\varphi\cdot z'_{\rho} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\sin\rho\frac{\varphi}{\partial\rho}\left(\sin\varphi\cdot z'_{\rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}z'_{\varphi}\right)+\frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\cdot z'_{\rho}+\frac{\cos\varphi}{\rho}z'_{\varphi}\right)=$$

$$=\sin\varphi\left(\sin\varphi\cdot z''_{\rho 2}-\frac{\cos\varphi}{\rho^2}z'_{\varphi}+\frac{\cos\varphi}{\rho}z''_{\varphi\rho}\right)+\frac{\cos\varphi}{\rho}\left(\cos\varphi\cdot z'_{\rho}+\sin\varphi\cdot z''_{\rho\varphi}-\frac{\sin\varphi}{\rho}z'_{\varphi}+\frac{\cos\varphi}{\rho}z''_{\varphi^2}\right)=$$

$$=\sin^2\varphi\cdot z''_{\rho^2}+\frac{2}{\rho}\sin\varphi\cos\varphi z''_{\rho\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}z''_{\varphi^2}-2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}z'_{\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{\rho}z'_{\rho} \tag{4}$$

Înlocuind acum relațiile (1), (2), (3), (4) în ecuația dată avem:

$$z''_{\rho^2}\left(\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi-2\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right)+$$
$$+z''_{\rho\varphi}\left[-2\rho\sin^3\varphi\cos\varphi-2\rho\sin\varphi\cos\varphi\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)+2\rho\sin\varphi\cos^3\varphi\right]+$$
$$+z''_{\varphi^2}\left(\sin^4\varphi+2\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\cos^4\varphi\right)+$$
$$+z'_{\varphi}\left[2\sin^3\varphi\cos\varphi-2\rho\sin\varphi\cos\varphi\left(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\right)-2\sin\varphi\cos^3\varphi+\right.$$
$$\left.+\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\right]+$$
$$+z'_{\rho}\left(\sin^4\varphi+2\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\rho\cos^4\varphi-\rho\cos^2\varphi-\rho\sin^2\rho\right)=0.$$

În consecință ecuația dată are, în coordonate polare, forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=0.$$

Schimbarea variabilelor şi a funcţiei

Să considerăm o expresie care conţine variabilele independente x şi y şi funcţia z=z(x,y) de clasă $C^n(n \geq 1)$ şi derivatele sale parţiale. Ne propunem să schimbăm acum şi variabilele x,y dar şi funcţia z. Consideraţiile pe care le vom face se extind cu uşurinţă pentru funcţii de mai multe variabile. Fie deci expresia:

$$E = E\left(x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2} ...\right)$$

şi transformarea regulată definită prin:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = f(u, v, w) \end{cases}$$

unde φ, ψ, f sunt de clasă C^n şi $\dfrac{D(\varphi, \psi, f)}{D(u, v, w)} \neq 0$. Dacă u şi v sunt noile variabile independente, iar w=w(u,v) este noua funcţie, expresia E devine:

$$E = E_1\left(u, v, w, w'_u, w'_v, w''_{u^2}, w''_{uv}, w''_{v^2}, ...\right).$$

Pentru calculul lui z'_x, z'_y putem folosi *două scheme*:

1). Considerăm că x=x(u,v), y=y(u,v) şi legătura

z(x(u,v),y(u,v))=f(u,v,w(u,v)) (*)

Atunci:

$$\begin{cases} z'_x x'_u + z'_y y'_u = f'_u + f'_w w'_u \\ z'_g x'_v + z'_y y'_u = f'_v + f'_w w'_v \end{cases}. \tag{1}$$

Dar x(u,v)=φ (u,v,w(u,v)) şi y(u,v)=ψ (u,v,w(u,v)), deci:

$$\begin{cases} x'_u = \varphi'_u + \varphi'_w w'_u \\ x'_v = \varphi'_v + \varphi'_w w'_v \end{cases}, \qquad \begin{cases} y'_u = \psi'_u + \psi'_w w'_u \\ y'_u = \psi'_v + \psi'_w w'_v \end{cases}.$$

relaţii care înlocuite în (1), după rezolvarea sistemului dau:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\frac{\partial w}{\partial u} + B\frac{\partial w}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = C\frac{\partial w}{\partial u} + D\frac{\partial w}{\partial v} \tag{2}$$

unde coeficienţii A,B,C,D sunt funcţii de u,v,w. Tot din (1) prin derivări succesive în raport cu u, respectiv v, sau direct din (2) obţinem z''_{x^2}, z''_{xy}, etc.

2). Cea de-*a doua schemă* se foloseşte de regulă când primele două expresii ale transformării regulate sunt de forma:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}, \qquad \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \neq 0 \tag{3}$$

sau dacă u=g(x,y), v=h(x,y). Atunci relaţia:

z(x,y)=f(u(x,y),v(x,y),w(u(x,y),v(x,y)) (**)

ne permite calculul derivatelor z'_x, z'_y, ... direct:

$$\begin{cases} z'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x + f'_w\left(w'_u u'_x + w'_v v'_x\right) \\ z'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y + f'_w\left(w'_u u'_y + w'_v v'_y\right) \end{cases}$$

dar presupune aflarea derivatelor parţiale u'_x, v'_y, u'_y, v'_y pe care le obţinem prin derivarea relaţiilor (3):

x=φ (u(x,y),v(x,y)) , y=ψ(u(x,y),v(x,y)).

De exemplu, derivând în raport cu x obținem sistemul liniar:

$$\begin{cases} 1=\varphi'_u u'_x+\varphi'_v v'_x \\ 0=\psi'_u u'_x+\psi'_u v'_x \end{cases}$$

de unde rezultă u'_x şi v'_x.

Exemplul 23. Să se transforme ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

luînd ca variabile independente u=x+y, $v=\frac{y}{x}$ şi ca nouă funcția $w=\frac{z}{x}$, unde w=w(u,v).

Rezolvare. Ca de obicei, presupunem că ecuația dată defineşte funcția z=z(x,y), de clasă C^2. Cum u=u(x,y) şi v=v(x,y) folosim schema (**):

$$z(x,y)=xw(x+y,\frac{y}{x})$$

Atunci:

$$z'_x=w+x\left(w'_u-\frac{y}{x^2}w'_v\right)=w+xw'_u-\frac{y}{x}w'_v \quad ;$$

$$z''_{x^2}=w'_u-\frac{y}{x^2}w'_v+w'_u+x\left(w''_{u^2}-\frac{y}{x^2}w''_{uv}\right)+\frac{y}{x^2}w'_v-$$

$$-\frac{y}{x}\left(w''_{vu}-\frac{y}{x^2}w''_{v^2}\right)=2w'_u+xw''_{u^2}-2\frac{y}{x}w''_{uv}+\frac{y^2}{x^3}w''_{v^2} \quad ;$$

$$z''_{xy}=w'_u+xw''_{u^2}+(1-\frac{y}{x})w''_{uv}-\frac{y}{x^2}w''_{v^2} \quad ;$$

$$z'_y=x(\;w'_u+\frac{1}{x}w'_v\;)=xw'_u+w'_v \text{ şi } z''_{y^2}=xw''_{u^2}+2w''_{uv}+\frac{1}{x}w''_{v^2}.$$

Înlocuind în ecuație obținem $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$=0.

E. EXERCIȚII

Exercițiul 1. Să se arate că funcțiile definite la exemplele 4 şi 5, cap. 2, sunt schimbări de coordonate.

Exercițiul 2. Să se arate că următoarele funcții sunt schimbări de coordonate:

(a) $f(x,y)=\left(e^x\cos y,e^x\sin y\right)$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

(b) $g(x,y)=\left(x^2+y^2,x^2-y^2\right)$, $g:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^2$

(c) $h(x,y)=\left(y\cos x,x\cos y\right)$, $h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^2$

Exercițiul 3. Fie $\overline{v}=r^2\overline{e}_r-\overline{e}_\varphi+2\cos\theta\overline{e}_\theta$ un câmp vectorial în coordonate sferice. Să se arate că:

(a) $\operatorname{div}\overline{v}=4r-\frac{2}{r}\sin\theta$, $\quad\operatorname{rot}\overline{v}=r\left(\cos\theta\overline{e}_r-\sin2\theta\overline{e}_\varphi-\sin\theta\overline{e}_\theta\right)$,

(b) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{v} = \frac{2}{r^2}\left[\left(2r^2 + \sin\theta\right)\overline{e}_r - \cos\theta\,\overline{e}_\theta\right]$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{v} = \overline{0}$ şi $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{v} = 0$.

Exercițiul 4. Să se arate că în coordonate sferice

(a) câmpul $\overline{v} = 3r^2\varphi\overline{e}_r + r^2 \cdot \overline{e}_\theta$ este irotațional şi $\operatorname{div}\overline{v} = 12r\varphi + r\operatorname{ctg}\varphi$;

(b) câmpul $\overline{v} = 2\varphi\overline{e}_r + r \cdot \overline{e}_\varphi$ este biscalar;

(c) câmpul $\overline{v} = f(r)\overline{e}_r$ este irotațional, unde $f \in C^1(\mathbf{IR})$;

(d) câmpul $f(r, \varphi, \theta) = e^{\varphi\theta}\ln r + C$ este potențialul scalar al câmpului vectorial $\overline{v} = \frac{1}{\rho}e^{\varphi\theta}\left(\overline{e}_r + \frac{\theta\ln r}{\sin\theta}\overline{e}_\varphi + \varphi\ln r\,\overline{e}_\theta\right)$.

Exercițiul 5. Să se arate că, în coordonate cilindrice :

(a) $\operatorname{grad}\left(\rho^2 + 2\rho\cos\varphi - e^z\sin\varphi\right) = 2(\rho + \cos\varphi)\overline{e}_\rho - \left(2\sin\varphi + \frac{1}{\rho}e^z\cos\varphi\right)\overline{e}_\varphi - e^z\sin\varphi\overline{e}_z$;

(b) $\operatorname{grad}\left(\rho\cos\varphi + z\sin^2\varphi\right) = \cos\varphi\overline{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left(z\sin^2\varphi - \rho\sin\varphi\right)\overline{e}_\varphi + \sin^2\rho\overline{e}_z$;

(c) $\operatorname{grad}\left(\rho\cos\varphi + \rho z + z\sin\varphi\right) = (\cos\varphi + z)\overline{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left(z\cos\varphi - \rho\cos\varphi\right)\overline{e}_\rho + (\rho + \sin\varphi)\overline{e}_z$.

Exercițiul 6. Să se verifice condițiile din teorema funcțiilor implicite pentru funcțiile definite la exemplele 5, 6, 7, 8 şi 9.

Exercițiul 7. Să se arate că ecuația $x^5 - 3x^2 \cdot e^y + \operatorname{arctg} y = 0$ defineşte o funcție:

(a) y = y(x) care admite un minim local în x =0;

(b) x = x(y) care admite un maxim local $x_{max} = x\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$=0;

(c) x = x(y) , $x_{min} = x\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$=0.

Exercițiul 8. Să se arate că ecuația $e^{xy+1} = 2\operatorname{ch}(xy)$ defineşte o funcție y=y(x) care verifică ecuația diferențială $2y' + xy'' = 0$.

Exercițiul 9. Să se arate că funcția y=y(x) definită de ecuația $\left(x^2 + y^2\right)^3 + 1 = 3\left(x^2 + y^2\right)$ verifică ecuația $x\,y'' = (y')^3 + y'$.

Exercițiul 10. Arătați că, într-o vecinătate a punctului (1, 1, -2), funcțiile y=y(x), z = z(x) definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

verifică relațiile: $d_1y = -dx$, $d_1z = 0$, $d_1^2y = \frac{2}{5}dx^2$ şi $d_1^2z = \frac{4}{5}dx^2$.

Exercițiul 11. Să se verifice condițiile de aplicabilitate a teoremei funcțiilor implicite pentru:

(a) $f : \mathbf{IR} \times \mathbf{IR}^3 \to \mathbf{IR}^3$, $f(x, y_1, y_2, y_3) =$

$=\left(x^2+y_1^3+y_3^3,\ x+y_1^2+y_2^2+y_3^2-3,\ \ y_1+y_2\right)$, pentru a = 0, b = (-1, 1, 1);

(b) f : I**R**^{2} x I**R**$^2\to$ I**R**^{2}, $f\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=\left(x_1^2-x_2^2-y_1^3+y_2^2,\ \ x_1^3+y_1^3+y_2^2\right)$.

Exercițiul 12. Să se arate că:

(a) există z=z(x,y) definită implicit de ecuația $x^2+2y^2+xy+3z^2-z-9=0$ pentru care: $d_{(1,-2)}z=\frac{7}{5}dy$;

(b) ecuația $x^3-y^3+z^2-xz+1=0$ defineşte o funcție implicită z=z(x,y) pentru care $d^2{}_{(1,0)}z=-9dx^2$;

(c) sistemul $x+yz-uv-v^2=0$, $x-y+u^3-v^3=0$ defineşte implicit funcțiile u=u(x,y,z), v=v(x,y,z) pentru care:

$$d_{(1,1,1)}u=\frac{1}{6}dx+\frac{1}{3}dy+\frac{1}{4}dz,\quad d_{(1,1,1)}v=\frac{1}{2}dx+\frac{1}{4}dz\ \text{ şi }\ u''_{z^2}(1,1,1)=-\frac{1}{16}.$$

(d) ecuația $e^z+x^2-2x+y^2+z=0$ defineşte funcția z=z(x,y) pentru care $d_{(1,0)}z=0$.

Exercițiul 13. Arătați că nu există f : I**R**$^2\to$ I**R**, injectivă, de clasă C^1.

Indicație. Presupunem că există o asemenea funcție; aplicând teorema inversiunii locale pentru g(x,y)=(f(x,y),y) se constată o contradicție.

Exercițiul 14. Fie $u=f\left(\frac{y+z}{z+x}\right), v=g\left(\frac{z+x}{x+y}\right), w=h\left(\frac{x+y}{y+z}\right)$, unde f,g,h $\in C^1$(I**R**), f şi g sunt strict crescătoare şi h strict descrescătoare. Să se arate că u,v,w sunt dependente funcțional şi să se determine o relație de dependență funcțională.

Exercițiul 15. Fie f,g,h : I**R** $\to$ I**R**^{p} schimbări de coordonate. Să se arate că funcțiile:

u = f (αx + 2y - z), v = g (-x - y + 2z), w = h (x + 3y - 2z).

sunt dependente funcțional dacă şi numai dacă $\alpha=\frac{5}{4}$; în acest caz să se determine o relație de dependență funcțională.

Exercițiul 16.

Fie $u=\frac{a_1x+a_2y+a_3z}{m_1x+m_2y+m_3z}$, $v=\frac{b_1x+b_2y+b_3z}{n_1x+n_2y+n_3z}$, $w=\frac{c_1x+c_2y+c_3z}{p_1x+p_2y+p_3z}$ definite pe domeniul maximal comun A. Să se arate că u,v,w sunt dependente funcțional pe A şi să se determine o relație de dependență funcțională.

Indicație. Funcțiile u,v,w sunt omogene în sens Euler, iar sistemul obținut prin permutări circulare din ecuația $x\left(m_1u-a_1\right)+y\left(m_2u-a_2\right)+z\left(m_3u-a_3\right)=0$ este compatibil nedeterminat; pentru generalizare se consideră $u_k=f_k\left(\frac{a_1x_1+...a_px_p}{m_1x_1+...m_px_p}\right)$, $k=\overline{1,n}$ unde funcțiile f_k sunt transformări regulate.

Exercițiul 17. Fie u_k : A $\subset$ I**R**^{p} $\to$ I**R**, $u_k\in C^1(A), k=\overline{1,n}$, n< p şi $f_k=F_k\left(u_k\right), k=\overline{1,n}, f_{n+i}=F_{n+i}\left(u_1,...,u_n\right), i=\overline{1,m}$, unde $F_k, k=\overline{1,n}$ sunt transformări

regulate, iar $F_{n+i} \in C^1(E)$, $E \subset \mathrm{IR}^n$, $i = \overline{1,m}$. Să se arate că funcțiile $f_1,...,f_{n+m}$ sunt dependente funcțional şi să se determine relații de dependență funcțională.

Exercițiul 18. Să se determine o funcție $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ de clasă C^1 astfel ca funcțiile g = f (x + y), h=f(x)f(y) să fie dependente funcțional.

Exercițiul 19. Fie f, g, h, k : $\mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ schimbări de coordonate şi s = f(x - 2y+ + z - t), u = g(2x – y + 3z - 3t), v = h(x + y + z + t), w = k(2x + (a-1)y + 2z + at). Să se arate că funcțiile s,u,v,w sunt dependente funcțional dacă şi numai dacă a=0; în acest caz să se determine o relație de dependență funcțională.

Exercițiul 20. Fie f, g, h, k : $\mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ schimbări de coordonate, s=f(x), u=g(y), v=f(z), w=k(t), unde $x = ar\cos\varphi\sin\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$, $z = cr\cos\theta$, t=dr, a,b,c,d $\in \mathrm{IR}^*$, iar $(r,\varphi,\theta) \in (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$. Să se determine condiții suficiente pentru ca s,u,v,w să fie dependente funcțional şi să se indice, în acest caz, o relație de dependență funcțională.

Exercițiul 21. Ce devine ecuația $(x+1)^3 y''' + 3(x+1)^2 y'' + (x+1)y' = 0$ dacă se face schimbarea de variabilă $x + 1 = e^t$?

Răspuns. $\dddot{y} = 0$.

Exercițiul 22. Să se arate că ecuația $(1+x^2)y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0$ se transformă prin schimbarea de variabilă x = tg t în ecuația $\ddot{y} + y = 0$.

Exercițiul 23. Să se arate că prin schimbarea rolului variabilei x cu cel al funcției y:

(a) ecuația $y'' + 2yy'^2 = 0$ devine $\ddot{x} = 2y\,\dot{x}$

(b) ecuația $2xy'' - 5y'^2 + 3y' = 0$ devine $2x\ddot{x} + 5\dot{x} + 3\dot{x}^2 = 0$

(c) dacă $y'^2 y^{(4)} - 10y'y''y''' + 15y''^3 = 0$ atunci există a, b, c, d $\in \mathrm{IR}$ astfel ca x(y) = $ay^3 + by^2 + cy + d$.

Exercițiul 24. Fie expresia $E(x) = (x^2 + 13)y''(x) + (x^2 + 2)y'(x)$, unde x=x(t) este definită implicit de ecuația:

$$\ln(x^2 + 1) = 2\mathrm{arctg}\frac{x}{t}.$$

Ştiind că x(1)=0 şi că $\ddot{y}(1) = 1$, unde $\ddot{y}$ este derivata a doua a funcției y(t) = y(x(t)) să se arate că E(0) = 13.

Exercițiul 25. Să se transforme ecuația $2y'' - (x+y)(1-y')^3 = 0$ schimbând variabila şi funcția prin relațiile x - y = u , x + y = v, unde v = v(u).

Răspuns. $v'' = 2v$.

Exercițiul 26. Ce devine ecuația diferențială de ordinul al doilea $y'' + (x+y)(1+y'^3) = 0$ dacă x = u + v, y = v – u, iar v = v(u) ?

Răspuns. $v'' + 8vv'^3 = 0$.

Exercițiul 27. Să se transforme ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi $x \cdot z'_y = yz'_x$ în coordonate polare.

Răspuns. $z'_\varphi = 0$.

Exercițiul 28. Ce devine ecuația :

$$2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

în noile variabile independente $u=x^2-2y^2,\ \ v=x^2+y^2$?

Răspuns. $2(u+2v)(v-u)z''_{uv}=(2u+v)z'_v$.

Exercițiul 29. Să se arate că ecuația lui Laplace $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ are, în coordonate polare, forma:

$$\rho^2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}+\rho\frac{\partial z}{\partial \rho}=0.$$

Exercițiul 30. Să se transforme ecuațiile:

(a) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, u=xy, v=$\frac{x}{y}$;

(b) $4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+6x\frac{\partial z}{\partial x}=0$, u=x$y^2$, v=y,

unde u,v sunt noile variabile independente.

Răspuns.

(a) $2uz''_{uv}=z'_v$; (b) z''_{v^2}=0.

Exercițiul 31. Să se determine laplaceanul unei funcții $f\in C^2(\mathbf{IR}^3)$ în coordonate sferice.

Răspuns. $\Delta f=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}$.

Exercițiul 32. Să se determine a,b∈ I**R** astfel ca ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea $z''_{x^2}-3z''_{xy}+2z''_{y^2}$ =0 să aibă forma $z''_{uv}=0$, dacă u = x + ay, v = x + by sunt noile variabile independente.

Exercițiul 33. Să se transforme ecuațiile:

(a) $2xz'_y+xyz''_{y^2}=2$, uy = x, v = x, w = xz-y ;

(b) $x^2z'_x+y^2z'_y=z^2$, u = x, y=$\frac{u}{1+uv}$, z = $\frac{u}{1+uw}$;

(c) $z''_{x^2}+2z''_{xy}+z''_{y^2}$ =0, u = x+y, v = x - y, w = xy - z,

unde u,v sunt noile variabile independente, iar w = w(u,v).

Răspuns. (a) w''_{u^2}=0; (b) w'_u=0; (c) $w''_{u^2}=\frac{1}{2}$.

Exercițiul 34. Să se arate că funcția z = z(x,y) definită implicit de ecuația $f(x^2+y^2, ze^{-x-y})$=0, unde $f\in C^2(\mathbf{IR}^2)$ verifică ecuația $yz'_x-xz'_y=(y-x)z\quad(*)$;

să se arate apoi că luînd u=x^2+y^2, $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ca noi variabile independente şi w=lnz–x–y, unde w=w(u,v), ecuația cu derivate parțiale (*) se transformă în ecuația $\frac{\partial w}{\partial v}$=0.

FORMULA LUI TAYLOR. EXTREME

Vom extinde în acest capitol formula lui Taylor la funcții scalare de mai multe variabile de forma $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Reamintim că în cazul p=1, dacă A este un *interval*, $f \in C^{n+1}(A)$ şi $a,x \in A$, atunci există un ξ între a şi x astfel încât:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d_a^k f(x-a) + \frac{1}{(n+1)!} d_\xi^{n+1} f(x-a) \qquad (*)$$

Vom arăta că şi pentru $p>1$, în anumite condiții, există o formulă similară, adică putem să aproximăm într-o vecinătate $V \in \mathcal{V}_a$ funcția f cu polinomul Taylor T_n (de grad n):

$$f(x) \cong T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d_a^k f(x-a).$$

Una din problemele cele mai stringente din tehnică, economie, etc. este cea a optimizării diverselor procese; optimizarea unui proces constă în aflarea extremelor (minime ori maxime) unei funcții – funcție care modelează matematic procesul respectiv – în anumite condiții impuse variabilelor – condiții care dau domeniul de definiție al funcției. De această problematică se ocupă teoria optimizării. Noi vom aborda aici doar câteva tehnici de depistare a punctelor de extrem (locale, uneori şi globale) şi a naturii acestora folosind formula (*).

A. FORMULA LUI TAYLOR

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcție reală de p variabile reale, $p>1$.

Definiția 1. Dacă f este diferențiabilă de n ori în punctul $a \in A$ atunci funcția polinomială $T_n : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$T_n(x) = f(a) + \frac{1}{1!} d_a f(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!} d_a^n f(x-a), \quad x \in A$$

se numeşte *polinomul lui Taylor de grad* n *asociat funcției* f *în punctul* a; notând $d_a^0 f = f(a)$, atunci putem scrie $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d_a^k f(x-a)$. Funcția:

$R_n : A \to \mathbb{R}$, $\quad R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad x \in A$

se numeşte *restul de ordinul* n, iar relația

$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad x \in A$

o numim formula lui Taylor de ordinul n, sau dezvoltarea Taylor a funcției f în jurul punctului a.

Observație. Folosind operatorul de diferențiere d avem

$$d_a^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_p} dx_p \right)^{(k)} f(a) \ ;$$

dacă $a=(a_1, \ldots a_p)$, $x=(x_1, \ldots x_p)$, atunci:

$$d_a^k f(x-a)=\left((x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_p-a_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{(k)} f(a).$$

Pentru a extinde formula (*) valabilă pe intervalul A pentru cazul p>1 avem nevoie de două noţiuni noi: cea de *segment* şi cea de *mulţime convexă*.

Definiţia 2. Fie $x,y\in IR^p$. Numim *segment închis* care uneşte punctele x şi y mulţimea:

$$[x,y]=\{x+t(y-x)\in IR^p \mid t\in[0,1]\}.$$

Mulţimea

$$(x,y)=\{x+t(y-x)\in IR^p \mid t\in(0,1)\}\subset IR^p$$

se numeşte *segment deschis*. Dacă pentru orice $x,y\in A\subset IR^p$, $[x,y]\subset A$, spunem că A este o *mulţime convexă*.

Teorema 1*(formula lui Taylor)*. Fie $A\subset IR^p$ o mulţime convexă şi $f : A\to IR$ o funcţie de clasă C^{n+1} pe A şi $a\in A=\mathring{A}$. Pentru orice $x\in A$ există un $\xi\in(a,x)$ astfel ca

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}d_a f(x-a)+\frac{1}{2!}d_a^2 f(x-a)+\ldots+\frac{1}{n!}d_a^n f(x-a)+\frac{1}{(n+1)!}d_\xi^{n+1} f(x-a).$$

Demonstraţie. Să considerăm $a=(a_1,\ldots a_p)$, $x=(x_1,\ldots x_p)$ şi funcţia $F : [0,1]\to IR$ definită prin:

$$F(t)=f(a+t(x-a))=f(a_1+t(x_1-a_1),\ldots,a_p+t(x_p-a_p)).$$

Cum f este de clasă C^{n+1} rezultă că F este derivabilă de n+1 ori, cu derivata $F^{(n+1)}$ continuă. Din formula lui Mac-Laurin rezultă că pentru orice $t\in[0,1]$ există $\theta\in(0,1)$ astfel ca:

$$F(t)=F(0)+\frac{t}{1!}F'(0)+\frac{t^2}{2!}F''(0)+\ldots+\frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0)+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta t).$$

Cum $f(x)=F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)+\ldots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta)$, avem nevoie de valorile explicite $F'(0),F''(0),\ldots,F^{(n)}$ şi $F^{(n+1)}(\theta)$. Conform regulilor de derivare a funcţiilor compuse şi observaţiei precedente obţinem:

$$F'(t)=(x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+t(x-a))+\ldots+(x_p-a_p)\frac{\partial f}{\partial x_p}(a+t(x-a))=$$

$$=\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_p-a_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\right]^{(1)} f(a+t(x-a)).$$

$$F''(t)=(x_1-a_1)\left[(x_1-a_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a+t(x-a))+\ldots+(x_p-a_p)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_p}(a+t(x-a))\right]+\ldots$$

$$\ldots+(x_p-a_p)\left[(x_1-a_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x_p\partial x_1}(a+t(x-a))+\ldots+(x_p-a_p)\frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a+t(x-a))\right]=$$

$$=\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_p-a_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\right]^{(2)} f(a+t(x-a)).$$

…

$$F^{(n)}(t)=\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+...+(x_p-a_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\right]^{(n)} f(a+t(x-a)).$$

$$F^{(n+1)}(t)=\left[(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+...+(x_p-a_p)\frac{\partial}{\partial x_p}\right]^{(n+1)} f(a+t(x-a)).$$

Prin urmare $F(0)=f(a),\ F'(0)=d_a f(x-a),\ F''(0)=d_a^2 f(x-a),...,F^{(n)}(0)=d_a^n f(x-a)$, iar $F^{(n+1)}(\theta)=d_\xi^{n+1} f(x-a),$ unde $\xi=a+\theta(x-a)\in(a,x)$.

În consecință:

$$F(1)=f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}F^{(k)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}d_a^k f(x-a)+\frac{1}{(n+1)!}d_\xi^{n+1}f(x-a)$$

şi formula lui Taylor este demonstrată.

Observația 1. Pentru n=0, din formula lui Taylor rezultă

$$f(x)-f(a)=d_\xi f(x-a)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi)\cdot(x_k-a_k),\quad \xi\in(a,x),$$ egalitate care constituie o generalizare (pentru $p>1$) a *formulei creşterilor finite a lui Lagrange*.

Observația 2. *Restul de ordinul* n din formula lui Taylor:

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}d_\xi^{n+1}f(x-a),\quad \xi\in(a,x)$$

ne permite să evaluăm eroarea din aproximarea de ordinul n:

$$f(x)\cong T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}d_a^k f(x-a),\quad x\in A,$$

în cazul în care derivatele parțiale de ordinul n+1 ale funcției f pe A (care intervin în expresia diferențialei de ordinul n+1) sunt mărginite de aceeaşi constantă $M>0$:

$$|f(x)-T_n(x)|=|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}\left(\sum_{k=1}^{p}|x_i-a_i|\right)^{n+1}\le\frac{M\cdot p^{n+1}}{(n+1)!}\|x-a\|^{n+1}.$$

Observația 3. Dacă $a=0=(0,...,0)\in A$, formula lui Taylor:

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+x_p\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{(k)}f(0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+x_p\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{(n+1)}f(\theta x)$$

se numeşte *formula lui Mac-Laurin*.

Observația 4. În cazul p=2 (folosind binomul lui Newton) dezvoltarea Taylor a funcției f în jurul punctului $(a,b)\in A$ (sau *după puterile lui* x–a *şi* y–b) devine:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right]+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(a,b)(x-a)^{n-k}(y-b)^k+R_n(x,y),$$

unde:

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k}\partial y^k}(\xi,\eta)(x-a)^{n+1-k}(y-b)^k,$$

$\xi=a+\theta(x-a),\quad \eta=b+\theta(y-b),\quad \text{cu } \theta\in(0,1)$.

În acest caz graficul funcției f este o suprafață de ecuație:

$S: z=f(x,y),\ (x,y)\in A$.

Să presupunem că $f\in C^2(A)$, $d_{(a,b)}f\neq 0\neq d^2_{(a,b)}f$ şi U este o vecinătate a punctului $(a,b)\in A$.

Aproximarea de ordinul 0: $f(x,y)\cong T_0(x,y)=f(a,b),\ (x,y)\in U$ înseamnă, din punct de vedere geometric, că dacă $(x,y)\in U$ punctul $M(x,y,f(x,y))$ este înlocuit cu punctul $M_0(x,y,f(a,b))$ aparținând porțiunii de plan paralel cu xOy de ecuație:

$S_0: z=T_0(a,b)=f(a,b),\ (x,y)\in A$,

aproximare care, în general, este nesatisfăcătoare chiar dacă vecinătatea U este "mică".(vezi Fig.1.)

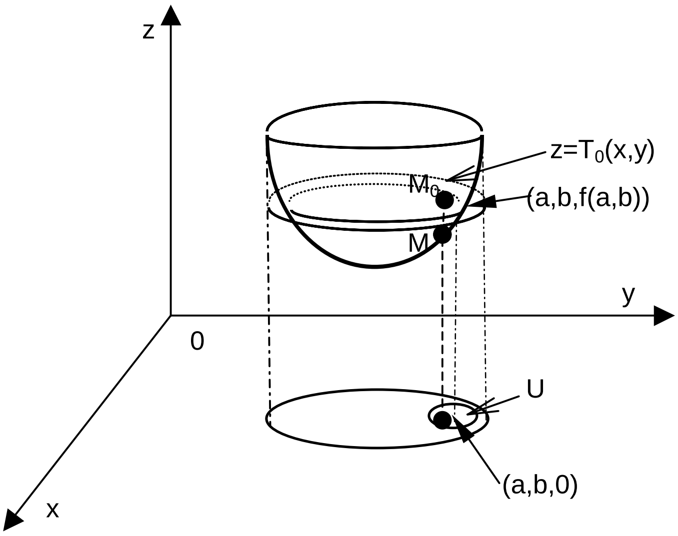


Fig.1.

Aproximarea de ordinul întâi: $f(x,y)\cong T_1(x,y)=f(a,b)+d_{(a,b)}f(x-a,y-b),\ (x,y)\in U$ este mai fină, căci presupune înlocuirea punctului M cu punctul $M_1(x,y,T_1(x,y))$ din porțiunea de plan tangent în punctul P(a,b,f(a,b)) la suprafața S:

$S_1: z=T_1(x,y),\ (x,y)\in A$.

(vezi Fig.2.).

Aproximarea de ordinul al doilea:

$$f(x,y)\cong T_2(x,y)=f(a,b)+d_{(a,b)}f(x-a,y-b)+\frac{1}{2}d^2_{(a,b)}f(x-a,y-b),\quad (x,y)\in U$$

este mai fină decât precedenta; în acest caz punctul M(x,y,f(x,y)) de pe graficul S, $(x,y)\in U$ este înlocuit cu punctul $M_2(x,y,T_2(x,y))$ aparținând suprafeței de ecuație:

$S_2: z=T_2(x,y),\ (x,y)\in A$,

suprafață tangentă în P(a,b,f(a,b)) la suprafața S şi care are drept plan tangent în P planul S_1(vezi Fig.3.).

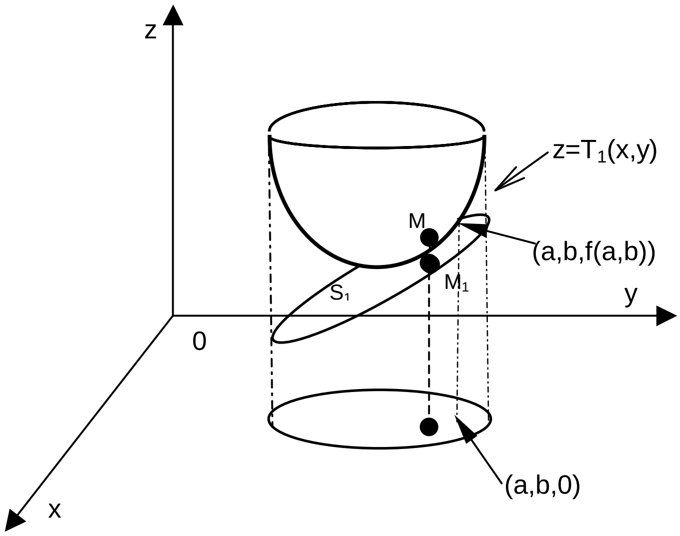


Fig.2.

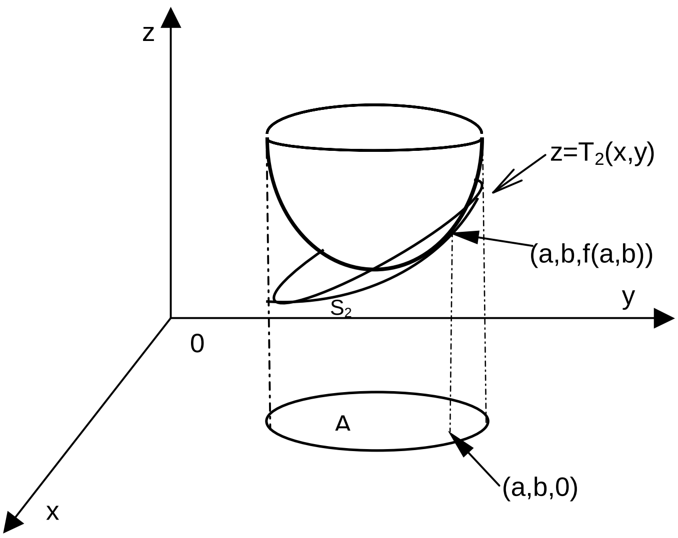


Fig.3

Exemplul 1. Să se dezvolte polinomul $f(x,y,z) = x^3+y^3+xyz-z^2+xy+x-z+1$ după puterile lui x–1, y+1 şi z–1.

Rezolvare. Vom folosi dezvoltarea Taylor a funcției f în jurul punctului $a=(1, -1,1)\in \mathbf{IR}^3$. Cum f este un polinom de gradul al treilea $d^4f=0$, deci $R_3(x,y,z)=0$ şi formula lui Taylor este:

$$f(x,y,z) = f(1,-1,1) + d_{(1,-1,1)}f(x-1,y+1,z-1) + \frac{1}{2}d^2_{(1,-1,1)}f(x-1,y+1,z-1) + \frac{1}{6}d^3_{(1,-1,1)}f(x-1,y+1,z-1)$$

Dar $df = 3x^2dx + 3y^2dy + yzdx + zxdy + xydz - 2zdz + ydx + xdy + dx - dz$,

$d^2f = 6xdx^2 + 6ydy^2 + (zdy + ydz)dx + (zdx + xdz)dy + (ydx + xdy)dz - 2dz^2 + 2dxdy$, iar

$d_3f = 6(dx^3 + dy^3 + dxdydz)$.

Calculăm acum f(1,–1,1)=–2, $d_{(1,-1,1)}f = 2dx + 5dy - 4dz$, $d^2_{(1,-1,1)}f = 6dx^2 - 6dy^2 - 2dz^2 +$
$+ 4dxdy + 2dydz - 2dzdx$; prin urmare:

$$f(x,y,z) = -2 + 2(x-1) + 5(y+1) - 4(z-1) + 3(x-1)^2 - 3(y+1)^2 - (z-1)^2 +$$
$$+ 2(x-1)(y+1) + (y+1)(z-1) - (z-1)(x-1) + (x-1)^3 + (y+1)^3 + (x-1)(y+1)(z-1).$$

Observație. Polinomul f din exemplul precedent este un vector din spațiul liniar I**R**$_3$[x,y,z] al polinoamelor de trei variabile de grad mai mic sau egal cu trei exprimat în baza canonică B_c={1, x, y, z, xy, yz, x^2, y^2, z^2, x^2y, x^2z, y^2x, y^2z, z^2x, z^2y, x^3, y^3, z^3, xyz} (dim I**R**$_3$[x,y,z]=20). Dezvoltarea lui f după puterile lui x–1, y+1, z–1 înseamnă de fapt exprimarea acestui vector în baza B={1, x–1, y+1, z–1, (x–1)(y+1), (y+1)(z–1), (x–1)(z–1), $(x-1)^2$, $(y+1)^2$, $(z-1)^2$, $(x-1)^2(y+1)$, $(x-1)^2(z-1)$, $(y+1)^2(x-1)$, $(y+1)^2(z-1)$, $(z-1)^2(x-1)$, $(z-1)^2(y+1)$, $(x-1)^3$, $(y+1)^3$, $(z-1)^3$, (x–1) (y+1) (z–1)}.

Exemplul 2. Folosind formula lui Taylor de ordinul al treilea să se calculeze valoarea aproximativă a numărului $(0,9)^{2,1}$.

Rezolvare. Ne interesează valoarea funcției f(x,y)=x^y în punctul (x,y)=(0,9; 2,1); vom alege drept punct (a,b) în jurul căruia vom dezvolta funcția f unul în care *putem calcula exact* funcția f şi derivatele sale parțiale şi, totodată, *cât mai apropiat* de (x,y). Fie deci (a,b)=(1,2). Atunci:

$$(0,9)^{2,1} = f(x,y) \cong T_3(x,y) = f(1,2) + d_{(1,2)}f(x-a,y-b) + \frac{1}{2}d^2_{(1,2)}f(x-a,y-b) +$$
$$+ \frac{1}{6}d^3_{(1,2)}f(x-a,y-b) = 1 + d_{(1,2)}f\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2}d^2_{(1,2)}f\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{6}d^3_{(1,2)}f\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right).$$

Cum $d_{(1,2)}f = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy\,|_{(1,2)} = 2dx$, $d^2_{(1,2)}f = x^{y-1}dxdy + y\left[(y-1)x^{y-2}dx +\right.$
$\left.+ x^{y-1}\ln x\right]dx + \left(yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy\right)\cdot \ln x dy + x^{y-1}dxdy\,|_{(1,2)} = dxdy + 2dx^2 + dxdy =$
$= 2dx(dx+dy)$, iar $d^3_{(1,2)}f = 7dx^2dy$, rezultă că $(0,9)^{2,1} \cong 1 - \frac{2}{10} + \frac{7}{1000} = 0,807$.

Să remarcăm că aproximarea de ordinul 0 este $(0,9)^{2,1} \cong T_0(x,y)=1$, iar cea de ordinul al doilea este $(0,9)^{2,1} \cong T_1(x,y)=0,8$. În nici unul din aceste cazuri nu avem o estimare a erorii comise. Dacă dorim să calculăm o expresie cu o precizie prestabilită ε trebuie să găsim un $n \in$ I**N** astfel ca $|R_n| < \varepsilon$.

Exemplul 3. Să calculăm $N = \sqrt{4,1}\cdot\sqrt[4]{0,9}$ cu două zecimale exacte. Considerăm funcția $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}$ pe care o dezvoltăm în jurul punctului (4; 1). Deoarece N=f(x,y) unde x=4,1 şi y= 0,9, conform formulei lui Taylor există $\xi \in$(4; 4,1) şi $\eta \in$(0,9; 1) astfel încât:

$$N = f(4,1) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k_{(4,1)}f\left(\frac{1}{10},-\frac{1}{10}\right) + R_n(x,y),$$

unde $R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}_{(\xi,\eta)}f\left(\frac{1}{10},-\frac{1}{10}\right)$. Trebuie să găsim un $n \in$ I**N** minimal astfel ca $|R_n(x,y)| < 10^{-2}$, unde (x,y)=(4,1; 0,9). Deoarece:

$$|R_0(x,y)| = \left|d_{(\xi,\eta)}f\left(\frac{1}{10},-\frac{1}{10}\right)\right| = \left|f'_x(\xi,\eta)\frac{1}{10} - f'_y(\xi,\eta)\frac{1}{10}\right| \le \frac{1}{10}\left(|f'_x(\xi,\eta)| + |f'_y(\xi,\eta)|\right),$$

iar

$$f'_x(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{4}}<\frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad f'_y(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt[4]{\eta^3}}<\frac{1}{2},\ \text{ atunci } \left|R_0(x,y)\right|\le\frac{3}{40} \text{ şi}$$

aproximarea de ordinul zero: $N\cong T_0(x,y)=f(4,1)=2$ nu pare să fie satisfăcătoare. Să încercăm o estimare cât mai fină pentru restul de ordinul întâi. Cum

$$\left|R_1(x,y)\right|=\frac{1}{2}\left|d^2_{(\xi,\eta)}f\left(\frac{1}{10},-\frac{1}{10}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|f''_{x^2}(\xi,\eta)\frac{1}{10^2}-\frac{2}{10^2}f''_{xy}(\xi,\eta)+\frac{1}{10^2}f''_{y^2}(\xi,\eta)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{200}\left(\left|f''_{x^2}(\xi,\eta)\right|+2\left|f''_{xy}(\xi,\eta)\right|+\left|f''_{y^2}(\xi,\eta)\right|\right)$$

iar

$$\left|f''_{x^2}(\xi,\eta)\right|=\frac{1}{4}\xi^{-\frac{3}{2}}\eta^{\frac{1}{4}}<\frac{1}{32},$$

$$\left|f''_{xy}(\xi,\eta)\right|=\frac{1}{8}\xi^{-\frac{1}{2}}\eta^{\frac{-3}{4}}<\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{10}{9}}<\frac{5}{24},$$

$$\left|f''_{y^2}(\xi,\eta)\right|=\frac{3}{16}\xi^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{-7}{4}}<\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{10}{9}\right)^7}<\frac{3}{32}\cdot\frac{10}{9}\cdot 2=\frac{5}{24},$$

rezultă că $\left|R_1(x,y)\right|<\frac{1}{200}\left(\frac{1}{32}+\frac{10}{24}+\frac{5}{24}\right)<\frac{1}{100}$, deci putem afirma cu certitudine că aproximarea de ordinul întâi:

$$N\cong T_1(x,y)=f(4{,}1)+d_{(4,1)}f\left(\frac{1}{10},-\frac{1}{10}\right)=2+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=2-0{,}025=1{,}975$$

este o evaluare cu două zecimale exacte a numărului N.

B. EXTREMELE LOCALE ALE FUNCȚIILOR REALE DE MAI MULTE VARIABILE

Fie $f : A\subset \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $p\ge1$.

Definiția 3. Punctul $a\in A$ se numeşte *punct de extrem local (relativ) al funcției* f dacă există o vecinătate $V\in\mathcal{V}_a$ astfel încât „creşterea” funcției f : $E(x)=f(x)-f(a)$ păstrează semn constant pe mulțimea $A\cap V$; dacă $E(x)\le0$, $x\in A\cap V$ spunem că a este un *punct de maxim local, sau relativ* pentru f şi scriem $f_{max}=f(a)$; dacă $E(x)\ge0$, $x\in A\cap V$ punctul a poartă numele de *minim local (sau relativ) al funcției* f şi scriem $f_{min}=f(a)$. Dacă V=A, iar punctul a este un extrem local (minim ori maxim) spunem că a este un *extrem global (sau absolut)* al funcției *f.*

Am văzut că, în cazul funcțiilor cu o singură variabilă reală, teorema lui Fermat oferă condiții necesare de extrem (dacă $a\in\overset{\circ}{I}$ este un punct de extrem pentru funcția $f : I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi f este derivabilă în a, atunci $f'(a)=0$ sau, echivalent, $d_af=0$). Teorema lui Fermat admite o generalizare pentru funcțiile de mai multe variabile.

Teorema 2(*a lui Fermat-condiții necesare de extrem local*). Fie $f : A\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $p>1$. Dacă $a\in\mathring{A}$ este un punct de extrem al funcției f iar f este diferențiabilă în a, atunci $d_af=0$, sau, echivalent, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)=0,\ \ k=\overline{1,p}$.

Demonstrație. Deoarece punctul a din interiorul mulțimii A este un extrem local pentru funcția f, rezultă că există r>0 astfel ca E(x)= f(x)–f(a) să păstreze semn constant pentru orice $x\in S(a,r)\subset A$. Fie s un versor arbitrar din $\mathbb{R}^p$ şi funcția auxiliară $g:(-r,r)\to \mathbb{R},\ g(t)=f(a+ts)$. Atunci $g(t)-g(0)=f(a+ts)-f(a)=E(a+ts)$ păstrează semn constant pentru $t\in(-r,r)$, căci $a+ts\in S(a,r)$, adică funcția g are un extrem local în t=0. Cum g este derivabilă în t=0 (fiind o compusă de funcții derivabile), din teorema lui Fermat rezultă că $g'(0)=\frac{\partial f}{\partial s}(a)=0$; prin urmare $\frac{\partial f}{\partial s}(a)=0$, pentru orice versor s din $\mathbb{R}^p$; în particular, punând $s=e_k,\ k=\overline{1,p}$ (vectorii bazei canonice din $\mathbb{R}^p$) obținem $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)=0,\ k=\overline{1,p}$, sau $d_af=0$.

Definiția 4. Fie $f : A\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $p\geq 1$ şi $a\in\mathring{A}$.

Dacă f este diferențiabilă în a şi $d_af=0$, punctul a se numeşte *punct staționar al funcției* f.

Dacă a este punct staționar pentru f, sau dacă f nu este diferențiabilă în a, spunem că a este *punct critic al funcției* f *(pentru funcția* f*)*.

Observația 1. Din teorema lui Fermat rezultă că punctele *interioare* de extrem local ale *funcției diferențiabile* f se găsesc, dacă există, printre soluțiile sistemului de p ecuații cu p necunoscute

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,...x_p)=0,\ \ k=\overline{1,p}\ .$$

Observația 2. Ca şi în cazul p=1, teorema lul Fermat dă condiții necesare, nu şi suficiente, de existență a punctelor de extrem local. De exemplu, funcția $f : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, f(x,y)=xy are derivatele parțiale nule în (0,0), dar originea nu este punct de extrem local al funcției f (f fiind o formă pătratică nedefinită). Deci (0,0) este un punct staționar (deci şi critic) pentru f care nu este extrem local. În schimb, pentru funcția $g : [0,\infty)\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$, g(x,y)=xy , originea (0,0) este un punct critic (g nu este diferențiabilă în (0,0)) care nu este staționar, dar este un punct de extrem global.

Observația 3. Am văzut că la funcțiile de o singură variabilă semnul diferențialei de ordinul al doilea într-un punct staționar ne dă informații asupra naturii acestui punct. În cazul funcțiilor de mai multe variabile semnul diferențialei de ordinul doi (care este o formă pătratică) într-un punct staționar va stabili natura punctului respectiv. Vom utiliza următoarele leme:

Lema 1. Fie $\varphi : \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ o formă pătratică.

(a) Dacă φ este pozitiv definită (adică $\varphi(x)>0$, pentru orice $x\in \mathbb{R}^p\setminus\{0\}$) există m>0 astfel ca $\varphi(x)\geq m\|x\|^2$, pentru $x\in \mathbb{R}^p$.

(b) Dacă φ este nedefinită atunci există $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^p\setminus\{0\}$ astfel încât $\varphi(ts_1)>0$ şi $\varphi(ts_2)<0$, pentru orice $t\in \mathbb{R}^*$.

Demonstrație. (a). Fie $S=\{x\in\mathbb{R}^p \mid \|x\|=1\}$. Atunci S este o mulțime închisă şi mărginită, deci o mulțime compactă, iar φ este o funcție continuă, prin urmare φ este mărginită şi îşi atinge marginile pe S (teorema 16, cap.1). Fie m minimul funcției φ pe S; desigur m>0 căci φ este pozitiv definită şi:

$$\varphi(x)\geq m,\ \ \text{pentru orice } x\in S \qquad (1)$$

Fie acum x$\in$ I**R**^{p} \ {0}; atunci $\frac{1}{\|x\|}x \in S$ şi $\varphi\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) = \frac{1}{\|x\|^2}\varphi(x)$; în consecință, din (1) rezultă că $\varphi(x) \geq m\|x\|$, pentru orice x$\in$ I**R**^{p}.

(b) Fie B_c baza canonică din I**R**^{p}. Cum φ este o formă pătratică, există o bază ortonormată B în care φ are forma canonică. Fie T=(b_{ij}) matricea de trecere de la baza B_c la baza B. Atunci:

$$\varphi(x_1,...,x_p) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_p y_p^2 \tag{2}$$

unde

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} b_{ij}x_j, \quad i \in \{1,2,...,p\} \tag{3}$$

iar λ_1, λ_2,..., λ_p sunt valorile proprii ale matricii ataşate formei pătratice φ în baza canonică. Putem presupune (cu o eventuală permutare a indicilor) că $\lambda_1>0$ şi $\lambda_2<0$ (forma φ fiind nedefinită). Sistemele:

$$y_1 = 1,\ \ y_i = 0,\ \ i \in \{2,3,...,p\} \tag{4}$$

$$y_2 = 1,\ \ y_i = 0,\ \ i \in \{1,3,4,...,p\} \tag{5}$$

au, ținând seama de (3), ca matrice pe T; prin urmare au soluție unică. Fie $s_1 = (a_1,...,a_p)$, respectiv $s_2 = (b_1,...,b_p)$ soluțiile sistemelor (4), respectiv (5). Atunci, conform (2) obținem:

$$\varphi(s_1) = \lambda_1 > 0 \text{ şi } \varphi(s_2) = \lambda_2 < 0 \tag{6}$$

Dar φ este formă pătratică, deci pentru orice t$\in$ I**R*** $\varphi(ts_1) = t^2\varphi(s_1) = \lambda_1 t^2 > 0$ şi $\varphi(ts_2) = \lambda_2 t^2 < 0$.

Lema 2. Fie f$\in C^2(A)$ şi a$\in$A. Atunci există o funcție ω : A$\to$I**R** astfel ca pentru orice x$\in$A:

$$f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \frac{1}{2}d_a^2 f(x-a) + \|x-a\|^2\omega(x), \text{ unde } \lim_{x\to a}\omega(x) = 0 = \omega(a).$$

Demonstrație. Fie x$\in$A \ {a}. Conform formulei lui Taylor există $\xi\in(a,x)$ astfel încât:

$$f(x) = f(a) + d_a f(x-a) + \frac{1}{2}d_\xi^2 f(x-a) \tag{1}$$

Fie

$$\omega_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad i,j = \overline{1,p} \tag{2}$$

Cum $f''_{x_i x_j} \in C^0(A)$ iar $\xi\to a$ când $x\to a$, din (2) rezultă:

$$\lim_{x\to a}\omega_{ij}(x) = 0,\ \ i,j = \overline{1,p} \tag{3}$$

Atunci:

$$d_\xi^2 f(x-a) - d_a^2 f(x-a) = \sum_{i,j=1}^{p}\left(f''_{x_i x_j}(\xi) - f''_{x_i x_j}(a)\right)(x_i - a_i)(x_j - a_j),$$

deci, din (2) obținem:

$$d_\xi^2 f(x-a) = d_a^2 f(x-a) + \sum_{i,j=1}^{p}\omega_{ij}(x)(x_i - a_i)(x_j - a_j) \tag{4}$$

Fie $\omega(a)=0$ şi $\omega(x)=\frac{2}{\|x-a\|^2}\sum_{i,j=1}^{p}\omega_{ij}(x)(x_i-a_i)(x_j-a_j)$. Atunci din (1) şi (4) rezultă că:

$$f(x)=f(a)+d_a f(x-a)+\frac{1}{2}d_a^2 f(x-a)+\|x-a\|\omega(x).$$

Rămâne să dovedim că $\lim_{x\to a}\omega(x)=0$. Aplicând succesiv inegalitatea modulelor, respectiv inegalitatea lui Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (vezi exemplul 14, cap.1) obținem:

$$|\omega(x)|\le\frac{1}{\|x-a\|}\sum_{i,j=1}^{p}|\omega_{ij}(x)|\cdot|(x_i-a_i)(x_j-a_j)|\le$$

$$\le\frac{1}{\|x-a\|^2}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{p}\omega_{ij}^2(x)}\cdot\sqrt{\sum_{i,j=1}^{p}(x_i-a_i)^2(x_j-a_j)^2}=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{p}\omega_{ij}(x)},$$

iar din (3) şi teorema cleştelui obținem: $\lim_{x\to a}\omega(x)=0$.

Teorema 3 (*condiții suficiente de extrem*). Fie f : $A\subset \mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, o funcție de clasă C^2 şi $a\in A$ un punct staționar pentru f. Dacă $d_a^2 f$ este pozitiv (negativ) definită, atunci a este un punct de minim (respectiv maxim) local al funcției f. Dacă $d_a^2 f$ este nedefinită atunci a nu este punct de extrem pentru funcția f.

Demonstrație. Deoarece a este punct staționar rezultă că $d_a f=0$; conform lemei 3 rezultă că pentru orice $x\in A$

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{2}d_a^2 f(x-a)+\|x-a\|^2\omega(x) \tag{1}$$

şi $\lim_{x\to a}\omega(x)=0=\omega(a)$.

1. Presupunem că $d_a^2 f$ este pozitiv definită; conform lemei 1 rezultă că:

$$\exists\ m>0 \text{ astfel încât } d_a^2 f(x-a)\ge m\|x-a\|^2 \tag{2}$$

pentru orice $x\in \mathbb{R}^p$. Din (1) şi (2) rezultă că:

$$f(x)-f(a)\ge\left(\frac{m}{2}+\omega(x)\right)\|x-a\|^2 \tag{3}$$

pentru orice $x\in A$. Dar $\lim_{x\to a}\omega(x)=0$ şi m>0, deci există $V\in\mathcal{V}_a$ astfel ca:

$$\frac{m}{2}+\omega(x)>0,\quad \text{pentru orice } x\in V \tag{4}$$

Din (3) şi din (4) rezultă că f(x) –f(a) ≥ 0 pentru orice $x\in A\cap V$,adică a este un minim local al funcției f.

2. Dacă $d_a^2 f$ este negativ definită , iar g= - f, atunci $d_a^2 g$ este pozitiv definită şi conform punctului precedent, există $V\in\mathcal{V}_{\mathbf{a}}$ astfel ca:

g(x) - g(a) = –f(x) + f(a) ≥ 0, pentru orice $x\in V\cap A$, adică a este un maxim local pentru funcția f.

3. Presupunem acum că $d_a^2 f$ este nedefinită. Conform lemei 1(b) rezultă că există două direcții s_1 , $s_2\in\mathbb{R}^p$-{0} astfel încât:

$$d_a^2 f(s_1 t)>0 \text{ şi } d_a^2 f(s_2 t)<0\text{ , pentru orice } t\in\mathbb{R}^* \tag{5}$$

Luând x = a + ts_1 şi y = a + ts_2, cum $a\in\mathring{A}$, există o vecinătate V_0 a punctului $0\in$ I**R** astfel ca $x,y\in A$, pentru $t\in V_0$. Din (1) obținem :

$$f(x) - f(a) = t^2\left(\frac{1}{2}d_a^2f(s_1) + \omega(x)\right) \tag{6}$$

$$f(y) - f(a) = t^2\left(\frac{1}{2}d_a^2f(s_2) + \omega(y)\right) \tag{7}$$

Dar $\lim\limits_{t\to0}\omega(x) = 0 = \lim\limits_{t\to0}\omega(y)$, deci există o vecinătate U a punctului $0\in$ I**R**, $U\subset V_0$, astfel ca:

$$\frac{1}{2}d_a^2f(s_1) + \omega(x) > 0 \text{ şi } \frac{1}{2}d_a^2f(s_2) + \omega(y) < 0 \tag{8}$$

pentru $t\in U$. În sfârşit, din (8),(6) şi (7) rezultă că pentru $t\in U$: $f(x)–f(a)>0$ şi $f(y)–f(a)<0$, adică punctul a nu este un extrem pentru funcția f.

Observație. În condițiile teoremei precedente d_a^2f este o formă pătratică a cărei matrice este hessiana funcției f în a: $H_f(a)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=\overline{1,p}\\ j=\overline{1,p}}}$. Reamintim că dacă valorile proprii $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ sunt mai mari (mici) sau egale cu 0, atunci d_a^2f este pozitiv (negativ) definită, iar dacă există $\lambda_i>0$ şi $\lambda_j < 0$ ea este nedefinită. De asemenea, pentru stabilirea naturii punctului a putem aplica *criteriul lui Sylvester*:

notând cu $\Delta_1=f''_{x_1^2}(a)$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} f''_{x_1^2}(a) & f''_{x_1x_2}(a)\\ f''_{x_1x_2}(a) & f''_{x_2^2}(a)\end{vmatrix}$,…, $\Delta_p=\det H_f(a)$, atunci:

(a) dacă $\Delta_k>0$, $k=\overline{1,p}$, atunci a este un minim local;

(b) dacă $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$,…., $(-1)^p\Delta_p>0$, atunci a este un maxim local pentru f;

(c) dacă în inegalitățile de la (a), respectiv (b) există k astfel încât $\Delta_k=0$ metoda nu decide natura punctului a;

(d) în rest d_a^2f este nedefinită, deci a nu este punct de extrem pentru funcția f.

Exemplul 4. Să determinăm extremele locale ale funcției f : I**R**$^2\to$I**R,** $f(x,y)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}-2y+13$. Cum $f\in C^2($I**R**$^2)$ rezultă că putem determina toate punctele de extrem prin metoda descrisă:

Pasul 1. Determinăm punctele staționare din sistemul:

$$\begin{cases} f`_x(x,y)=x^2-3x^2+2=0\\ f`_y(x,y)=y^2-y-2=0\end{cases},$$

deci punctele (1,1), (1,-2), (2,1) şi (2,-2) sunt conform teoremei lui Fermat posibile puncte de extrem.

Pasul 2. Studiem natura punctelor staționare folosind criteriul lui Sylvester. Hessiana funcției f în punctul curent este :

$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2x-3 & 0\\ 0 & 2y-1\end{pmatrix}$, iar $\Delta_1(x,y)=2x–3$, $\Delta_2(x,y)=(2x–3)(2y–1)$.

În (1,1), $\Delta_1=–1$ şi $\Delta_2=–1$, deci acest punct nu este punct de extrem pentru f.

În punctul (1, –2), $\Delta_1 = –1 < 0$, $\Delta_2 = 5 > 0$, deci (1,-2) este un maxim local şi $f_{max}=f(1, –2)=79/6$.

Deoarece $\Delta_1(2,1) = 1$, $\Delta_2(2,1) = 1 > 0$ rezultă că (2,1) este un punct de minim local pentru f şi $f_{min}=23/2$.

În sfarşit, în (2, –2) avem $\Delta_1= -1<0$, $\Delta_2= -5<0$, deci punctul (2, –2) nu este un extrem al funcției f.

Observație. Dacă într-un punct staționar a al funcției f diferențiala a doua se anulează şi f este de clasă C^n, $n\geq 3$ atunci folosim o dezvoltare de ordin superior în formula lui Taylor; dacă primele derivate parțiale nenule sunt de ordin impar, atunci punctul staționar nu este extrem pentru f.

Exemplul 5. Să se determine extremele locale ale funcției $f : \mathbb{R}^3\to \mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4- 4xyz$.

Rezolvare. Determinăm mai întâi punctele staționare rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} f`_x(x,y,z) = 4(x^3 - yz) = 0 \\ f`_y(x,y,z) = 4(y^3 - zx) = 0 \\ f`_z(x,y,z) = 4(z^3 - xy) = 0 \end{cases}$$

Deci punctele (0,0,0), (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1) sunt posibile puncte de extrem. Hessiana funcței f în punctul curent este:

$$H_f(x,y,z)=4\begin{pmatrix} 3x^2 & -z & -y \\ -z & 3y^2 & -x \\ -y & -x & 3z^2 \end{pmatrix}.$$

(a). Deoarece $H_f(0,0,0)$ este matricea nulă, $d^2_{(0.0.0)}f=0$. Vom studia semnul diferențialei de ordinul trei în (0,0,0). Cum $d^2f = 4\left[3\left(x^2dx + y^2dy + z^2dz\right) - 2\left(zdxdy + {}\right.\right.$ $\left.\left.+ ydxdz + zdxdy\right)\right]$, avem $d^3f = 24(xdx^3+ydy^3+zdz^3-dxdydz)$, deci $d^3_{(0,0,0)}f(x,y,z) = -$ $-24dxdydz$, adică $d^3_{(0,0,0)}f(x,y,z) = -24xyz$, care este o formă ternară ce îşi schimbă semnul în orice vecinătate a originii; prin urmare (0,0,0) nu este un punct de extrem pentru f.

(b). Deoarece $H_f(1,1,1)=4\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, avem $\Delta_1=12$, $\Delta_2=8\cdot 4^2$, $\Delta_3=16\cdot 4^3>0$ şi conform criteriului lui Sylvester, (1,1,1) este un minim local, iar $f_{min}=f(1,1,1)=-1$.

(c). Deoarece $f(x,y,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y)$, pentru a studia natura punctelor staționare rămase este suficient să analizăm natura punctului (1,-1,-1). Cum

$H_f(1,-1,-1)=4\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, avem $\Delta_1 = 12$, $\Delta_2 = 8\cdot 4^2$, $\Delta_3 = 16\cdot 4^3 > 0$; rezultă că cele trei puncte sunt de minim local pentru f şi $f_{min}= f(1,-1,-1)= f(-1,1,-1)= f(-1,-1,1)= -1$.

Exemplul 6. Dintre toate paralelipipedele drepte pentru care suma lungimilor laturilor este egală cu a>0 să se determine cel al cărui volum e maxim.

Rezolvare. Fie x,y,z lungimile laturilor unui asemenea paralelipiped; atunci volumul său este :

$V(x,y,z) = xyz$, unde $V:A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = a,\ x,y,z > 0\}$. Valoarea maximă a funcției V coincide cu cea a funcției $f(x,y) = V(x,y,a-x-y) = xy(a - x - y)$, unde f este de clasa C^2 pe

$B = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x,\ y > 0,\ x + y < a\}$. Determinăm punctele staționare din sistemul:

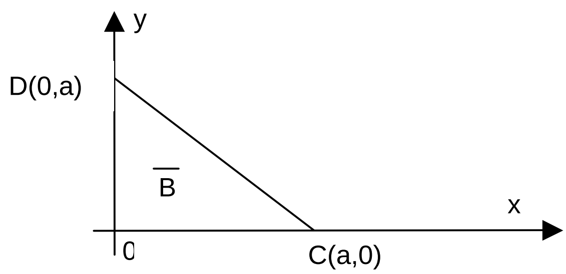
$$\begin{cases} f`_x(x,y) = ay - 2xy - y^2 = 0 \Rightarrow 2x + y = a \\ f`_y(x,y) = ax - x^2 - 2xy = 0 \Rightarrow x + 2y = a \end{cases}$$

Deci singurul punct staționar este $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$, iar

$$H_f\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)=\begin{pmatrix} -2y & a-2x-2y \\ a-2x-2y & -2x \end{pmatrix}_{\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)}=\begin{pmatrix} -2\frac{a}{3} & -\frac{a}{3} \\ -\frac{a}{3} & -2\frac{a}{3} \end{pmatrix}.$$

Atunci $\Delta_1= -2\frac{a}{3} < 0$, $\Delta_2 = \frac{a^2}{3} > 0$, deci $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ este un maxim local pentru f şi

$f_{max} = f\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$. Nu avem însă certitudinea că $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ este un maxim absolut. Considerăm funcția: $g:\overline{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0,\ x+y\leq a\} \to \mathbb{R}$, $g(x,y)=xy(a-x-y)$. Cum g este o funcție continuă pe un compact rezultă că ea este mărginită şi îşi atinge marginile. Pe interiorul lui $\overline{B}$, adică pe B am văzut că există un singur extrem $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$.



Rămane să determinăm extremele pe frontieră. Pe segmentul OC avem y=0 şi $x\in[0,a]$, deci funcția $h(x)= g(x,0) = 0$ este constantă; analog pe OD; pe CD avem $x+y=a$, $x\in[0,a]$ şi $k(x)=g(x,a-x)=0$. Prin urmare imaginea funcției g este $\operatorname{Im} g=g(\overline{B})=\left[0,\frac{a^3}{27}\right]$ şi maximul ei absolut este atins în interior; deci $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ este un maxim absolut pentru f, iar $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$ este un maxim absolut pentru V. În consecință, parealelipipedul căutat este cubul de latură $\frac{a}{3}$.

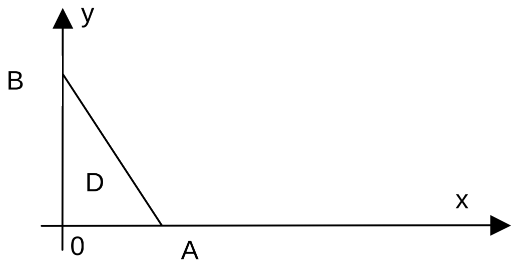
Observație. Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^p\to \mathbb{R}$ este o funcție continuă şi A este o mulțime compactă, atunci *extremele sale absolute se determină astfel:*

(a) determinăm extremele locale pe Å,

(b) determinăm extremele locale pe frontiera Fr A;
atunci maximul absolut e cel mai mare maxim local, iar minimul global este cel mai mic minim local (dintre cele determinate la (a) şi (b)). Pentru funcţiile de două variabile problema determinării extremelor pe frontieră se reduce, ca în exemplul precedent, la determinarea extremelor unor funcţii de o singură variabilă. În cazul funcţiilor de trei variabile determinarea extremelor pe frontieră revine la studiul extremelor unor funcţii de două variabile, ş.a.m.d. Ne vom ocupa de această problemă în secţiunea consacrată extremelor cu legături.

Exemplul 7. Determinaţi extremele absolute ale funcţiei f(x,y) = xy pe domeniul triunghiular de vârfuri O(0,0), A(1,0), B(0,2).

Rezolvare. Domeniul de definiţie al funcţiei f este $D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0,\ x + y / 2 \leq 1\}$.



1. Pe interiorul mulţimii D, deci pe $\overset{\circ}{D}=\{(x,y)|x,y > 0,\ 2x + y <2\}$ sistemul:

$$\begin{cases} f`_x = y = 0 \\ f`_y = x = 0 \end{cases}$$

are o unică soluţie $(0,0)\notin \overset{\circ}{D}$. Neavând puncte staţionare rezultă că pe $\overset{\circ}{D}$ f nu are extreme locale.

2. Pe frontiera Fr D=OABO considerăm cazurile:

2.1. Pe segmentul [OA] avem y = 0 şi $x\in[0,1]$. Funcţia g(x) = f(x,0) = 0 este constantă pe [0,1].

2.2. Pe segmentul [OB] avem x = 0 şi $y\in[0,2]$. Funcţia h(y) = f(0,y) = 0 este constantă pe [0.2].

2.3. Pe segmentul deschis AB avem y = 2 - 2x, $x\in(0,1)$. Atunci funcţia k(x) = f(x,2-2x) = 2x(1-x) are un maxim în $x = \frac{1}{2}$, $k_{max} = k(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Prin urmare $f_{min} = f(x,0) = f(0,y) = 0$, pentru $x\in[0,1]$, respectiv $y\in[0,2]$ şi $f_{max} = f(\frac{1}{2},1) = \frac{1}{2}$, iar Im f = f(D) = $[0,\frac{1}{2}]$.

Observaţie. Să presupunem că sunt îndeplinite condiţiile din teorema funcţiilor implicite astfel ca ecuaţia $f(x,y,z)=0$, $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f\in C^2(A)$ să definească funcţia $z = z(x,y)$ într-o vecinătate a punctului $(a,b,c)\in A$. Dacă (a,b) este un punct de extrem local al funcţiei z putem să determinăm condiţii simple (ca în cazul funcţiilor de o variabilă definite implicit – vezi exemplul 11, cap. 3 şi observaţia care îl precede) pentru a stabili natura sa. Cum derivatele de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z}$$

punctul (a,b,c) trebuie să fie o soluție a sistemului:

$$f(x,y,z)=0\,,\ f'_x(x,y,z)=0\,,\ f'_y(x,y,z)=0\,,$$

iar $f'_z(a,b,c)\neq 0$. Atunci:

$$z''_{x^2}(a,b)=-\left.\frac{\left(f''_{x^2}+f''_{xz}\cdot z'_x\right)f'_z-f'_x\left(f''_{zx}+f''_{z^2}\cdot z'_x\right)}{f'^2_z}\right|_{(a,b,c)}=-\frac{f''_{x^2}(a,b,c)}{f'_z(a,b,c)},$$

$$z''_{xy}(a,b)=-\frac{f''_{xy}(a,b,c)}{f'_z(a,b,c)}\ \text{şi}\ z''_{y^2}(a,b)=-\frac{f''_{y^2}(a,b,c)}{f'_z(a,b,c)}.$$

Prin urmare, dacă $z''_{x^2}(a,b)\cdot z''_{y^2}(a,b)-(z''_{xy}(a,b))^2>0$, atunci pentru $z''_{x^2}(a,b)>0$ punctul (a,b) este un minim local pentru z şi $z_{min}=z(a,b)=c$, iar dacă $z''_{x^2}(a,b)<0$ atunci (a,b) este un maxim local al funcției implicite $z=z(x,y)$ şi $z_{max}=z(a,b)=c$.

Exemplul 8. Să se determine extremele funcției $z=z(x,y)$ definită implicit de ecuația $(x^2+y^2+z^2)^2=2-x^2-z^2$.

Rezolvare. Desigur funcția $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2+x^2+z^2-2$ este de clasă C^2 pe $I\mathbf{R}^3$, iar $f'_z(x,y,z)=4z(x^2+y^2+z^2)+2z$ este nenulă pentru $z\neq 0$. Prin urmare ecuația dată determină unic funcția $z=z(x,y)$ într-o vecinătate a unui punct $(a,b,c)\in I\mathbf{R}^3$, cu $c\neq 0$, care verifică această ecuație. Vom determina (a,b,c), $c\neq 0$ astfel ca funcția implicită $z=z(x,y)$ să admită punctul (a,b) ca punct staționar din sistemul $f(x,y,z)=0$, $f'_x(x,y,z)=4x(x^2+y^2+z^2)+2x=0$, $f'_y(x,y,z)=4y(x^2+y^2+z^2)=0$; obținem $x=y=0$ şi $z=\pm 1$. Conform teoremei funcțiilor implicite există două funcții $z_1,z_2\in C^2(U)$, unde $U\in\mathcal{V}_{(0,0)}$ care admit punctul (0,0) ca punct staționar, iar $z_1(0,0)=1$ şi $z_2(0,0)=-1$.

Dar $f''_{x^2}(x,y,z)=4(x^2+y^2+z^2)+8x^2+2$, $f''_{xy}(x,y,z)=8xy$ şi $f''_{y^2}(x,y,z)=4(x^2+y^2+z^2)+8y^2$,

Iar $f''_{x^2}(0,0,\pm 1)=6$, $f''_{xy}(0,0,\pm 1)=0$, $f''_{y^2}(0,0,\pm 1)=4$ şi $f'_z(0,0,\pm 1)=\pm 6$. Aşadar hessiana funcției z_1 este

$$H_{z_1}(0,0)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

$\Delta_1=-1$ şi $\Delta_2=\frac{2}{3}$, deci funcția z_1 are un maxim local în (0,0) şi $z_{1\,max}=z_1(0,0)=1$. Analog

$$H_{z_2}(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

iar $\Delta_1=1>0$, $\Delta_2=\frac{2}{3}>0$; prin urmare funcția z_2 are un minim local în origine şi $z_{2\,min}=z_2(0,0)=-1$.

C. EXTREME CONDIȚIONATE

Definiția 5. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $B \subset A$. Spunem că punctul $a \in B$ este un *extrem local al funcției* f *relativ la mulțimea* B(*extrem condiționat de* B) dacă există $V \in \mathcal{V}_a$ astfel ca expresia $E(x)=f(x)-f(a)$ să păstreze semn constant pe mulțimea $V \cap B$; dacă $E(x) \geq 0$ pe $V \cap B$, a este un *minim local al funcției* f *relativ la* B; iar dacă $E(x) \leq 0$ pe $V \cap B$, a poartă numele de *maxim local relativ la* B. Extremele relative la o submulțime $B \subset A$ (adică extremele funcției restricție $f|_B$) se numesc *extreme condiționate*.

Vom analiza în continuare doar cazul în care B este definită de mulțimea soluțiilor unui sistem de $m < p$ ecuații cu $p = n + m$ variabile: $x_1,...,x_n,y_1,...,y_m$; notând $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_m)$, ne propunem să găsim extremele funcției $f : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$$

relative la mulțimea

$$B = \{(x,y) \in A \mid g_j(x,y) = 0, j = \overline{1,m}\},$$

unde $g_j : A \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,2,...,m\}$. Ecuațiile ale căror soluții definesc mulțimea B:

$$g_j(x,y) = 0,\ j = \overline{1,m} \tag{*}$$

se mai numesc *legături*, iar extremele locale ale funcției f condiționate de mulțimea B – *extreme cu legături*.

Observație. Dacă legăturile (*) sunt explicitabile, adică există funcțiile $y : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, astfel ca $(x, y_j(x)) \in B$, $j = \overline{1,m}$ şi $g_j(x, y_1(x),...,y_m(x)) = 0$, $x \in C$, $j = \overline{1,m}$, atunci problema aflării extremelor condiționate ale funcției f se reduce la cea a depistării extremelor funcției de n variabile $h : C \to \mathbb{R}$,

$$h(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_n, y_1(x_1,...,x_n),...,y_m(x_1,...,x_n)).$$

Această *metodă a înlocuirii variabilelor* am folosit-o deja în exemplul 7, unde legătura $x + y + z = a$ a condus, prin înlocuirea variabilei $z = a - x - y$ în funcția V, la aflarea extremelor unei funcții de două variabile.

Această observație ne sugerează să impunem sistemului (*) condițiile teoremei funcțiilor implicite de aşa manieră încât legăturile (*) să definească funcțiile $y_j = y_j(x)$, $j = \overline{1,m}$. Astfel, teorema lui Fermat (Teorema 2) ne va da condiții necesare de existență a extremelor condiționate, iar teorema 3 ne va furniza condiții suficiente şi chiar tehnici de stabilire a naturii acestor extreme. J.P. Lagrange a fost cel care a făcut aceste constatări, constatări care l-au condus la elaborarea unui procedeu practic ingenios de aflare a extremelor cu legături.

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Teorema 4.(*condiții necesare pentru extreme cu legături*). Fie $f, g_j : A \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$ funcții de clasă C^1 pe A. Dacă $(a,b) \in A$, unde $a = (a_1,...,a_n)$, $b = (b_1,...,b_m)$ este un punct de extrem local al funcției f cu legăturile (*), iar:

$$\frac{D(g_1,...,g_m)}{D(y_1,...,y_m)}(a,b) \neq 0 \tag{**}$$

atunci există numerele $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m \in$ **IR** numite *multiplicatorii lui Lagrange* astfel încât punctul (a,b) să fie un punct staționar al funcției $F: A \to$ **IR**, $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + ... + \lambda_m g_m$.

Demonstrație. Determinantul matricii sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial y_k}(a,b) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(a,b) \cdot y_j\ ,\ k = \overline{1,m} \tag{1}$$

este $\frac{D(g_1,...,g_m)}{D(y_1,...,y_m)}(a,b) \neq 0$; prin urmare sistemul are soluție unică $y_1 = \lambda_1, y_2 = \lambda_2, ..., y_m = \lambda_m$, deci din (1) obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial y_k}(a,b) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(a,b) = 0\ ,\ j = \overline{1,m} \tag{2}$$

Cum (a,b) este extrem condiționat de ecuațiile (*) avem $g_j(a,b) = 0$, $g_j \in C^1(A)$, $j = \overline{1,m}$ şi $\frac{D(g_1,...,g_m)}{D(y_1,...,y_m)}(a,b) \neq 0$; în acord cu teorema funcțiilor implicite există $V \in \mathcal{V}_a$ şi o unică funcție $y = y(x)$, $y \in C^1(V)$ definită implicit de sistemul (*), adică:

$$g_j(x, y(x)) = 0\ ,\ x \in V\ ,\ j = \overline{1,m} \tag{3}$$

iar $y(a) = b$. Derivând în raport cu x_i în (3) rezultă:

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x,y(x)) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(x,y(x)) \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x) = 0\ ,\ i = \overline{1,n}\ ,\ j = \overline{1,m} \tag{4}$$

Punând $x = a$, în (4), cum $y(a) = b$, obținem:

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a,b) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(a,b) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a) = 0\ ,\ i = \overline{1,n}\ ,\ j = \overline{1,m} \tag{5}$$

Fie $h: V \subset$ **IR**$^n \to$ **IR**, $h(x) = f(x, y(x))$. Deoarece (a,b) este un extrem al funcției f condiționat de relațiile (*), urmează că a este un extrem local pentru funcția h. Din teorema lui Fermat rezultă că a este punct staționar pentru h, deci $\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = 0$, $i = \overline{1,n}$ sau:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a,b) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_k}(a,b) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a) = 0\ ,\ i = \overline{1,n} \tag{6}$$

Fie acum $F: A \to$ **IR**, $F(x,y) = f(x,y) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x,y)$. Să arătăm că (a,b) este punct staționar pentru F, adică derivatele parțiale ale funcției F în (a,b) sunt nule. Din (2), (5) şi (6) obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,b) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a,b) \underset{(5)}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,b) -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(a,b) \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a) \right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a,b) -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a)\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_j}{\partial y_k}(a,b)\right)\underset{(2)}{=}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a,b)+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}(a)\cdot\frac{\partial f}{\partial y_k}(a,b)\underset{(6)}{=}0\ ,\ i=\overline{1,n}\ ,$$
şi teorema este complet demonstrată.

Definiția 6. Fie f, $g_j : A \subset \mathbf{IR}^{n+m} \to \mathbf{IR}$, , $j=\overline{1,m}$ funcții de clasă C^2 pe A, unde funcțiile g_j verifică (∗). Atunci $L : A \times \mathbf{IR}^m \subset \mathbf{IR}^{n+2m} \to \mathbf{IR}$, definită prin:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda_1 g_1(x,y)+\lambda_2 g_2(x,y)+\ldots+\lambda_m g_m(x,y)$$

pentru orice (x,y)∈A şi orice $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in \mathbf{IR}^m$ se numeşte *funcția lui Lagrange*, iar variabilele $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m \in \mathbf{IR}$ se numesc *multiplicatorii lui Lagrange.*

Conform teoremei precedente punctele de extrem ale funcției f cu legăturile (*), dacă există, se găsesc printre soluțiile sistemului de n+2m necunoscute $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $y_1,y_2,\ldots,y_m$, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=0, i=\overline{1,n},\ \frac{\partial L}{\partial y_k}=0, k=\overline{1,m}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}=0, j=\overline{1,m} \qquad (***)$$

Să remarcăm faptul că dacă (a,b,λ^0) este o soluție a acestui sistem (deci punct staționar pentru L), iar funcțiile $g_1,g_2,\ldots,g_m$ verifică (**), atunci $d_{(a,b)}g_j=0$ şi

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_1}(a,b)dx_1+\ldots+\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(a,b)dx_n+\frac{\partial g_j}{\partial y_1}(a,b)dy_1+\ldots+\frac{\partial g_j}{\partial x_m}(a,b)dy_m=0,\ j=\overline{1,m} \qquad (****)$$

este un sistem liniar compatibil determinat, care, prin regula lui Cramer, permite explicitarea proiecțiilor $dy_1,..,dy_m$ în funcție de proiecțiile $dx_1,..,dx_n$. Această constatare ne permite să dăm condiții suficiente pentru determinarea extremelor condiționate ale funcției f şi să elucidăm natura acestora prin studiul unei *forme pătratice de n variabile*.

Teorema 5. (*condiții suficiente pentru extreme cu legături*). Fie $f,g_j\in C^2(A), j=\overline{1,m}$ şi (a,b,λ^0) un punct staționar al funcției lui Lagrange care verifică (**) şi funcția:

$$F(x,y)=L(x,y,\lambda^0)=f(x,y)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^0 g_j(x,y),(x,y)\in A.$$

Fie, de asemenea, $\ell : \mathbf{IR}^n \to \mathbf{IR}$ forma pătratică obținută prin înlocuirea proiecțiilor $dy_1,\ldots,dy_m$ în funcție de proiecțiile $dx_1,\ldots,dx_n$ (rezultate din sistemul (****)) în $d^2_{(a,b)}F$. Dacă ℓ este pozitiv (negativ) definită atunci (a,b) este un punct de minim (maxim) local al funcției f cu legăturile (*); dacă f este nedefinită atunci (a,b) nu este punct de extrem condiționat pentru funcția f.

Demonstrație. Fie $B=\{(x,y)\in A \mid g_j(x,y)=0, j=\overline{1,m}\}$. Din (***) rezultă că $g_j(a,b)=0$, $j=\overline{1,m}$, deci (a,b)∈B. Atunci, pentru orice $(x,y)\in B, E(x,y)=F(x,y)-$ $-F(a,b)=f(x,y)-f(a,b)$, deci extremele locale ale funcției F coincid cu extremele locale ale funcției f cu legăturile (*).

Pe de altă parte, cum $\left(a,b,\lambda^0\right)$ este punct staționar al funcției lui Lagrange, din (***) rezultă că:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}\left(a,b,\lambda^0\right)=0 \text{ şi } \frac{\partial L}{\partial y_k}\left(a,b,\lambda^0\right)=0, \quad i=\overline{1,n}, k=\overline{1,m}$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a,b)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^0\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a,b)=\frac{\partial F}{\partial x_i}(a,b)=0, \ \ i=\overline{1,n}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_k}(a,b)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^0\frac{\partial g_i}{\partial y_k}(a,b)=\frac{\partial F}{\partial y_k}(a,b)=0, \ \ k=\overline{1,m},$$

adică (a,b) este punct staționar pentru funcția F.

În sfârşit, cum f, g_j sunt funcții de clasă C^2 pe a rezultă că $F\in C^2(A)$ şi, în acord cu teorema 3, putem stabili natura punctului (a,b) cu ajutorul $d^2_{(a,b)}F$; dar în forma pătratică $d^2_{(a,b)}F$ de n+m variabile proiecțiile $dy_j, j=\overline{1,m}$ sunt, după rezolvarea sistemului (****), combinații liniare ale proiecțiilor $dx_1,...,dx_n$; deci signatura formei $d^2_{(a,b)}F$ coincide cu cea a formei pătratice ℓ de n variabile. Prin urmare din teorema 3 rezultă că dacă ℓ este pozitiv (negativ) definită, atunci (a,b) este un punct de minim (maxim) local pentru f cu legăturile (*), iar dacă ℓ este nedefinită, atunci (a,b) nu este un extrem condiționat al funcției f.

Observație. Schematizând rezultatele precedente, dacă $f, g_j \in C^2(A), j=\overline{1,m}$, atunci metoda multiplicatorilor lui Lagrange de determinare a extremelor funcției f cu legăturile (*) presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. Formăm funcția lui Lagrange $L=f+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j$ şi îi determinăm punctele staționare rezolvând sistemul (***). Apoi, pentru fiecare punct staționar $\left(a,b,\lambda^0\right)$ care verifică (**) rezolvăm următorii paşi:

2. Formăm funcția auxiliară $F(x,y)=L\left(x,y,\lambda^0\right), x,y\in A$ şi calculăm $d^2_{(a,b)}F$ (de 2m variabile).

3. Rezolvăm sistemul liniar (****) în raport cu proiecțiile $dy_1,...,dy_m$ apoi le înlocuim în $d^2_{(a,b)}F$ obținând forma pătratică de n variabile.

4. Analizăm signatura formei pătratice (reducând-o la o formă canonică prin metoda lui Gauss sau Jacobi, ori prin criteriul lui Sylvester) şi tragem concluziile: dacă este pozitiv (negativ) definită atunci (a,b) este un minim (maxim) local al funcției f cu legăturile (*), iar dacă este nedefinită atunci (a,b) nu este punct de extrem al funcției f cu legăturile (*).

Exemplul 9. Să se determine imaginea funcției

$f: A=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}\to\mathbb{R}, f(x,y)=x-y+13$

Rezolvare. Funcția f este continuă pe compactul $A\subset \mathbb{R}^2$; prin urmare imaginea f(A) este compactă în **IR** (teorema 15, cap.1) şi f îşi atinge marginile (teorema 16, cap.1). Rămâne să determinăm aceste margini. Cum $f'_x=1\neq 0$, pe

interiorul $\overset{\circ}{A} = \{(x,y) \mid (x^2 + y^2 < 1\}$ nu există puncte staționare, deci nici extreme (teorema lui Fermat); prin urmare extremele sunt atinse pe frontiera mulțimii A, FrA = {(x,y) $\in$ I**R**^{2}| x^2+ y^2 = 1}, ceea ce înseamnă că trebuie să determinăm extremele funcției f cu legătura $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Fie $\lambda \in$ I**R** multiplicatorul lui Lagrange; funcția lui Lagrange este:

$$L(x,y,\lambda) = x - y + 13 + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

iar sistemul (***) este format din ecuațiile:

$$L'_x = 1 + 2\lambda x = 0,\ L'_y = 1 + 2\lambda y = 0,\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

deci $x = -\frac{1}{2\lambda}$, $y = -\frac{1}{2\lambda}$ şi $2\frac{1}{4\lambda^2} = 1$. Pentru $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ avem x=$= -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi pentru $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ obținem $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Calculăm diferențiala de ordinul al doilea a funcției $F(x,y) = L(x,y,\lambda)$ unde λ este constantă ($\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$). Obținem $d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$. Prin diferențierea legăturii $x^2 + y^2 - 1 = 0$ obținem xdx+ydy=0 şi cum y=-x$\neq$0, dx=dy; deci forma pătratică ℓ este definită prin $\ell(h) = 4\lambda dx^2(h) = 4\lambda h^2$.

Dacă $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\ell(h) = 2\sqrt{2}h^2$ este pozitiv definită, deci ($-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$) este un minim absolut pentru f şi f_{min}=f($-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$)=13-$\sqrt{2}$; dacă $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ℓ este negativ definită, ($\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$) este un maxim global pentru f şi f_{max}=13+$\sqrt{2}$. În consecință imaginea funcției f este f(A)=[13-$\sqrt{2}$,13+$\sqrt{2}$].

Exemplul 10. Să se determine extremele funcției f : I**R**^{3} $\to$ I**R**, $f(x,y,z)$=xyz cu legăturile x + y + z = 5 şi xy + yz + zx = 8.

Rezolvare. Fie α,β multiplicatorii lui Lagrange. Atunci funcția lui Lagrange este:

$L(x,y,z,\alpha,\beta) = xyz + \alpha(x + y + z - 5) + \beta(xy + yz + zx - 8)$ iar sistemul (***) este format din ecuațiile:

$$L'_x = yz + \alpha + \beta(y + z) = 0,\ L'_y = zx + \alpha + \beta(z + x) = 0,\ L'_z = xy + \alpha + \beta(x + y) = 0,$$

$$L'_\alpha = x + y + z - 5 = 0,\ L'_\beta = xy + yz + zx - 8 = 0.$$

Să remarcăm întâi că sistemul este simetric în x,y,z şi că prin adunarea primelor trei relații obținem 8+3α+10β=0. Cu aceste constatări punctele staționare ale funcției L sunt:

- pentru α = 4, β = -2, $(x,y,z) \in \{(2,2,1),(2,1,2),(1,2,2)\}$
- pentru α=16/9, β= -4/3, $(x,y,z) \in \left\{\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right),\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right),\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\right\}$

Calculăm acum d^2F, unde F(x,y,z)=L(x,y,z,α,β) cu α,β constante; obținem

$d^2F = [zdy + ydz + \beta(dy + dz)]dx + [zdx + xdz + \beta(dz + dx)]dy + [ydy + xdy + \beta(dx + dy)]dz$.
Prin diferențierea legăturilor avem

dx+dy+dz=0 şi (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0 (1)

Cazul 1. Pentru α=4, β= -2, (x,y,z)=(2,2,1) din sistemul (1) obținem dz = 0 şi dy= - dx, iar $d^2_{(2,2,1)}F = 2dx^2 \geq 0$. Prin urmare (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2) sunt puncte de minim ale funcției f cu legăturile date şi f_{min}= 4.

Cazul 2. Pentru $\alpha = \frac{16}{9}, \beta = -\frac{4}{3}, x = y = \frac{4}{3}, z = \frac{7}{3}$ obținem dz = 0 şi dy= -dx, iar $d^2_{\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)}F = -2dx^2$. În consecință $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right),\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right),\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ sunt puncte de maxim local pentru funcția f cu legăturile x + y + z -5 = 0 şi xy + yz + zx – 8 = 0, iar $f_{max} = f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right) = \frac{112}{27}$.

Exemplul 11. Să se determine distanța de la sfera de ecuație S : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ la dreapta de ecuații D : y = x, z = x +2.

Rezolvare. Distanța de la un punct M (x, y, z) $\in$ S la un punct P(u, v, w)$\in$ D defineşte o funcție de şase variabile:

d (P, M) = g (x, y, z, u, v, w) = $\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}$ (1)

Problema noastră constă în determinarea minimului absolut al funcției g cu legăturile:

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 + 0$; v – u = 0 şi w – u – 2 = 0 (2)

Deoarece funcția lui Lagrange asociată are nouă variabile (cele şase ale funcției g plus trei multiplicatori) iar derivatele sunt complicate, vom încerca să simplificăm problema. Să constatăm întâi că punctul de minim al funcției g coincide cu cel al funcției:

f (x, y, z, u) = $(x - u)^2 + (y - u)^2 + (z - u - 2)^2$ (3)

cu singura legătură

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. (4)

Funcția lui Lagrange este în acest caz:

L (x, y, z, u, λ) = $(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - u - 2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ (5)

Să determinăm punctele staționare pentru L din:

$L'_x = 2[(\lambda + 1)x - u] = 0$, $L'_y = 2[(\lambda + 1)y - u] = 0$, $L'_z = 2[(\lambda + 1)z - u - 2] = 0$,
$L'_u = 2(x + y + z - 3u - 2) = 0$ şi $L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Rezolvând acest sistem obținem:

$$u = -\frac{2}{3}, \quad x = y = -\frac{2}{3(\lambda+1)}, \quad z = \frac{4}{3(\lambda+1)}, \quad \lambda + 1 = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad (6)$$

Diferențiind legătura (4), din (6) rezultă:

$$dz = \frac{1}{2}(dx + dy) \qquad (7)$$

Ne interesează doar minimul funcției auxiliare

F (x, y, z, u) = L (x, y, z, u, λ) (8)

unde λ este o constantă. Diferențiind obținem succesiv:

dF = 2[(x-u)(dx-du) + (y-u)(dy-du) + (z-u-2)(dz-du) + λ(xdx+ydy+zdz)],
$d^2F = 2[(dx-du)^2 + (dy-du)^2 + (dz-du)^2 + \lambda(dx^2+dy^2+dz^2)] =$
$= 2[(\lambda+1)(dx^2+dy^2+dz^2)+3du^2 - 2du(dx + dy + dz)] \underset{(7)}{=}$

$$\underset{(7)}{=} 2\left[\frac{\lambda+1}{4}\left(5dx^2 5dy^2 + 2dxdy\right) + 3du^2 - 3(dx+dy)du\right]. \qquad (9)$$

Conform criteriului lui Sylvester, pentru ca forma pătratică (9) să fie pozitiv definită este necesar ca $\Delta_1 = 5\frac{\lambda+1}{2} > 0$. Prin urmare din (6) obținem:

$$\lambda+1 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x = y = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad z = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad u = -\frac{2}{3} \qquad (10)$$

Din punct de vedere geometric problema este unic determinată; prin urmare distanța de la sfera S la dreapta D este, conform formulelor (10), (1) şi (2):

$$d(S,D) = d\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right).$$

D. EXERCIȚII

Exercțiul 1. Să se dezvolte după puterile lui x + 1, y + 1, z – 1 polinoamele

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 13$

(b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - z^3 + 3x^2y - 3xy + z^2 - z + 22$

Răspuns. (a) $f(x, y) = 8 + 6(x + 1) + 6(y + 1) - 3(x + 1)^2 - 3(y + 1)^2 - 3(x + 1)(y + 1) + (x + 1)^3 + (y + 1)^3$; (b) $f(x, y, z) = 13 + 12(x + 1) + 15(y + 1) - 2(z - 1) - 6(x + 1)^2 - 3(y + 1)^2 - 2(z - 1)^2 - 9(x + 1)(y + 1) + (x + 1)^3 + (y + 1)^3 - (z - 1)^3 + 6(x + 1)^2(y + 1)$.

Exercițiul 2. Să se scrie polinomul Taylor de gradul al doilea pentru:

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + x + y^2)$ în punctul (0,1)

(b) $f(x,y,z) = e^x \operatorname{arctg}(y + z)$ în punctul (0,0,1)

Răspuns. (a) $T_2(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - y^2 + 3x - 3$; (b) $T_2(x, y, z) = \frac{\pi}{8}x^2 - y^2 - z^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xz - 2yz + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)x + \frac{5}{2}y + \frac{5}{2}z + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$.

Exercițiul 3. Folosind formula lui Taylor de ordinul al doilea să se arate că:

(a) $\sqrt{(1{,}01)^3 + (1{,}99)^3} \cong 2{,}9851$

(b) $\sqrt{1{,}03} \cdot \sqrt[3]{0{,}98} \cong 1{,}0081$

(c) $(1{,}1)^{1{,}02} \cong 1{,}1021$

Exercițiul 4. Să se determine $E_1 = (1{,}1)^{1{,}2}$ şi $E_2 = (0{,}99)^{1{,}01} + (1{,}01)^{1{,}001} + (1{,}001)^{0{,}99}$ şi $E_3 = (1{,}01)^{0{,}99} + (0{,}99)^{0{,}999} + (0{,}999)^{1{,}01}$ cu trei zecimale exacte.

Răspuns. $E_1 \cong 1{,}121$; $E_2 \cong 3{,}001$; $E_3 \cong 2{,}999$.

Exercițiul 5. Să se determine extremele locale ale funcțiilor

(a) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + \frac{370}{27}$

(b) $f(x,y) = 2x^3 - y^3 + (y-x)^2$

(c) $f(x,y) = e^x(\cos y - x) + \cos y$

(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$
(e) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$
(f) $f(x,y,z) = x + \frac{2}{x} + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y}$
(g) $f(x,y,z) = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$, $x,y,z > 0$
(h) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - z^3 - x^2y + 3z^2 + 13$

Răspuns. (a) $f_{min}=f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=13$; (b) $f_{min}= f\left(-\frac{\sqrt{2}+1}{3},-\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{17+12\sqrt{2}}{27}$; (c) $f_{max}=f(0,2k\pi)=2$, $k \in \mathbf{Z}$; (d) $f_{min}= f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)=\frac{4}{3}$; (e) $f_{min} = f(24, -144, -1) = -6913$; (f) nu are extreme; (g) $f_{min}=f(a,a,a) = \frac{3}{2}, a>0$; (h) $f_{min}= f(0,0,0)=13$, $f_{max} = f(0,0,2) = 17$.

Exercițiul 6. Să se determine punctele de extrem local şi extremele locale ale funcțiilor $y = y(x)$ şi $x = x(y)$ definite implicit de ecuațiile:
(a) $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$
(b) $e^y + y = x^2 + 1$

Răspuns. (a) $y_{min} = y_1(0) = \sqrt[3]{3}$; $y_{max} = y_2(-2) = -1$; $x_{max} = x_1\left(-\sqrt[3]{3}\right) = -\sqrt[3]{3}$; $x_{max} = x_2(-1)=1$; (b) $y_{min} = y(0) = 0$.

Exercițiul 7. Să se determine punctele de extrem local şi extremele locale ale functiilor implicite $z = z(x,y)$ definite implicit de ecuațiile
(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$
(b) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z + 2=0$
(c) $x^2 + y^2 + z^3 + z = 0$

Răspuns. (a) $z_{min}=z_1(0,0)=0$, $z_{max}=z_2(0,0)=4$; (b) $z_{min}=z_1\left(-3-\sqrt{6},-3-\sqrt{6}\right)= = -44-2\sqrt{6}$, $z_{max} = z_2\left(\sqrt{6}-3,\sqrt{6}-3\right)= 2\sqrt{6}-4$; (c) $z_{max} = z(0,0) = 0$.

Exercițiul 8. Să se studieze extremele locale ale funcțiilor de clasă C^2 definite implicit de ecuația $x^2 - 2x + y^2 + z + e^z = 0$.
Răspuns: $z_{max} = z(1,0)=0$; celelalte funcții implicite definite de ecuație ($z = z(x,y)$, $x = x(y,z)$, $y = y(z,x)$) nu admit extreme locale.

Exercițiul 9. Să se studieze extremele locale ale funcțiilor de clasă C^2 definite implicit de ecuația: $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2-x^2-z^2$, $a\in\mathbf{R}^*$.
Răspuns. Dintre funcțiile $z = z(x,y)$, definite de ecuație, două admit extreme: $z_{min}=z_1(0,0)=\frac{-1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{1+4a^2}-1\right)}$, $z_{max}=z_2(0,0)= \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{1+4a^2}-1\right)}$; analog, pentru $x = x(y,z)$, $x_{min}=\frac{-1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{1+4a^2}-1\right)}=x_1(0,0)$, $x_{max}=x_2(0,0)= \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{1+4a^2}-1\right)}$; dintre

funcțiile y = y(x,z) două admit extreme: $y_{min}=y_1(0,0)=-\sqrt{a}$ şi $y_{max}=y_2(0,0)=\sqrt{a}$, pentru a $\in(0,\infty)$.

Exercițiul 10. Să se determine extremele cu legături ale funcției f:

(a) f(x,y) = xy, y=x

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, 3x + 2y = 6

(c) $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, $y = x + \frac{\pi}{4}$

Răspuns. (a) $f_{min} = f(0,0)=0$; (b) $f_{min} = f\left(\frac{18}{13},\frac{12}{13}\right)=\frac{36}{13}$; (c) $f_{max} = f\left(k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f_{min}=f\left(k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{5\pi}{8}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, k $\in$**Z**.

Exercițiul 11. Să se determine extremele următoarelor funcții cu legăturile specificate în dreptul lor:

(a) $f(x,y,z) = x^2y + z^2 - xy - x - y - z - 1$, 2x – y – z = 0, x – 2y + z =0.

(b) f(x,y,z) = sin x sin y sin z, x+ y + z = $\frac{\pi}{2}$, x,y,z $\in$ (0,π).

(c) $f(x,y,z) = x^p + y^p + z^p$, $x^{p-1} + y^{p-1} + z^{p-1} = a^{p-1}$, a > 0, p $\in$ I**N**, p $\geq$ 2.

Răspuns. (a) f_{min} = f (1,1,1) = 1, f_{max} = f (-1, -1, -1) = -3; (b) $f_{max} = f\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{8}$; (c) dacă p $\in$ 2 I**N**, $f_{min}=f\left(3^{1-p}a,3^{1-p}a,3^{1-p}a\right)=3^{1+p-p^2}a^p$; dacă p este impar: $f_{max}=f\left(-3^{1-p}a,-3^{1-p}a,-3^{1-p}a\right)=-3^{1+p-p^2}a^p$, $f_{min}=f\left(3^{1-p}a,3^{1-p}a,3^{1-p}a\right)=3^{1+p-p^2}a^p$.

Exercițiul 12. Să se determine imaginile funcțiilor

(a) f : {(x,y) $\in$ I$\mathbf{R}^2$ | $x^2+y^2 \leq 1$} $\to$ I**R** , $f(x,y)=xy$

(b) f : {(x,y) $\in$ I$\mathbf{R}^2$ | |x|+|y| ≤ 1} $\to$ I**R** , $f(x,y)=x^2-y^2$

(c) f : {(x,y) $\in$ I$\mathbf{R}^2$ | y ≤ 2x, x ≤ 3, y ≥ 0}$\cup${x,y) $\in$ I$\mathbf{R}^2$ | -2 ≤ x ≤ 3, -3 ≤ y ≤ 0} $\to$ I**R** , $f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 12y$.

Răspuns. (a) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; (b) [-1, 1]; (c) [- 18, 162].

Exercițiul 13. Să se determine imaginile funcțiilor:

(a) f(x,y,z) = x + 3 y – 2 z, f : {(x,y,z) $\in$ I$\mathbf{R}^3$ |$x^2 + y^2 + z^2 \leq 14$}$\to$ I**R**

(b) f(x,y,z) = $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, f : {(x,y,z) $\in$ I$\mathbf{R}^3$| x,y,z ≥ 0 , x + y + z ≤ 13}$\to$ I**R**

Răspuns. (a) [-14, 14]; (b) [0,13].

Exercițiul 14. Să se arate că punctul din planul de ecuație x + y + z = a care este cel mai apropiat de origine este $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$.

Exercițiul 15. Să se determine distanța de la planul de ecuație P : x+ y+ z= 6 la elipsoidul de ecuație E : $x^2 + \frac{y^2}{2} + 2z^2 = 1$.

Răspuns. d(P,E) = $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{14} - 1\right)$.

Exercițiul 16. Să se calculeze aria elipsei de intersecție a cilindrului de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cu planul de ecuație Ax + By + Cz = 0 (a,b > 0, C > 0).

Răspuns. $\pi \frac{ab}{C}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Exercițiul 17. Să se arate că dintre toate patrulaterele care pot fi construite cu laturile de lungime dată, patrulaterul de arie maximă este inscriptibil.

Exercițiul 18. O cisternă de forma unui paralelipiped drept deschis în partea superioară trebuie construită din tablă cu aria 300 m^2. Să se determine dimensiunile acestei cisterne astfel încât să aibă capacitatea maximă.

Răspuns: V_{max} = V(10, 10, 5) = 500 m^3.

Exercițiul 19. Să se determine imaginile funcțiilor z = z (x,y), definite implicit de ecuația $x^4 + y^4 + z^4 = 13$, unde z : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\} \to \mathbb{R}$.

Răspuns. Ecuația definește două funcții $z=z_1(x,y)$ și $z=z_2(x,y)$; $\operatorname{Im} z_1 = \left[-\sqrt{\frac{5}{\sqrt{2}}}, -\sqrt{2\sqrt{3}}\right]$, $\operatorname{Im} z_2 = \left[\sqrt{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{5}{\sqrt{2}}}\right]$.